

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 7 marzo 1915.*

P. BLASERNA, Presidente.

### MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura come involuppi di rotolamento.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Proseguendo le ricerche della mia antecedente comunicazione in questi Rendiconti <sup>(1)</sup>, mi occupo qui delle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, considerate come *involuppi di rotolamento*.

Si sa che qualsiasi superficie  $\Sigma$  può generarsi infinite volte come involuppo di un piano che accompagna, in sistema rigido, una superficie  $S_0$  mentre questa rotola sopra una superficie applicabile  $S$ . La ricerca di queste infinite generazioni della superficie data  $\Sigma$  come involuppo di rotolamento, dipende da un'equazione a derivate parziali del secondo ordine, formata in altra mia Nota <sup>(2)</sup>; ad ogni soluzione di questa equazione corrisponde una coppia  $(S_0, S)$  di superficie applicabili che dà una delle generazioni richieste.

Ora, se le linee di curvatura della superficie  $\Sigma$  hanno un'immagine sferica isoterma, accade che la detta equazione del secondo ordine ha a comune una soluzione, *con quattro costanti arbitrarie*, coll'altra pure del secondo ordine la quale esprime che, sulla superficie  $S$  d'appoggio, alle linee di curvatura di  $\Sigma$  corrisponde un sistema coniugato. Si trovano queste  $\infty^4$  soluzioni co-

<sup>(1)</sup> *Sulle superficie isoterme come superficie di rotolamento* (Seduta del 21 febbraio 1915); nel testo citata come *nota B*).

<sup>(2)</sup> *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili* (questi Rendiconti, seduta del 4 gennaio 1914); nel testo citata come *nota A*).

quando  $S_0$  rotola sopra  $S$  il piano satellite  $\pi$  inviluppa la superficie  $\Sigma$ , e possiamo enunciare il risultato seguente, analogo a quello finale del n. 4 della Nota B):

*Se, nel rotolamento di una superficie  $S_0$  sopra una superficie applicabile  $S$ , un piano  $\pi$  satellite di  $S_0$  inviluppa una superficie  $\Sigma$  alle cui linee di curvatura corrisponda sopra  $S$  un sistema coniugato, questo è il sistema coniugato comune alla superficie d'appoggio  $S$  ed alla rotolante  $S_0$ ,*

3. Da ora in poi supporremo che la superficie  $\Sigma$  abbia rappresentazione isoterma delle sue linee di curvatura, e verremo a provare che in tal caso le due equazioni del secondo ordine (I) e (II) hanno  $\infty^4$  soluzioni comuni. Per questo introdurremo le trasformazioni  $E_m$  di Eisenhart, deducendole geometricamente da quelle particolari delle superficie minime.

Avendo  $\Sigma$  rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, esiste una superficie d'area minima (determinata a meno di un'omotetia) con la stessa immagine sferica delle linee di curvatura. A questa superficie minima, che diremo  $\bar{\Sigma}$ , applichiamo una delle  $\infty^3$  trasformazioni che provengono dall'inversione del primo teorema di Guichard (*Lezioni*, vol. II, § 351), e sia  $\bar{\Sigma}'$  la superficie minima derivata. Si sa che  $\bar{\Sigma}$ ,  $\bar{\Sigma}'$  sono le due falde di un inviluppo (conforme) di sfere e si corrispondono per le loro linee di curvatura, per cui il sistema  $\infty^2$  di cerchi normali a  $\bar{\Sigma}$ ,  $\bar{\Sigma}'$  in coppie di punti corrispondenti è un sistema ciclico. A questo sistema ciclico applichiamo una trasformazione di Combescure (*Lezioni*, vol. II, § 416), che lo cangi in un altro sistema ciclico, e di più in guisa che la trasformata della superficie minima  $\bar{\Sigma}$  sia la superficie data  $\Sigma$ . In questo abbiamo ancora disponibile una costante arbitraria, p. es. il raggio del circolo normale a  $\Sigma$  in un punto iniziale. Nel nuovo sistema ciclico diciamo  $\Sigma'$  la superficie corrispondente alla superficie minima trasformata  $\bar{\Sigma}'$ , colla quale  $\Sigma'$  avrà a comune l'immagine (isoterma) delle linee di curvatura. Ora le due superficie  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  ambedue a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, sono alla loro volta le due falde di un inviluppo di sfere e le linee di curvatura si corrispondono sulle due falde. Il passaggio da  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  comporta, per quanto si è visto, quattro costanti arbitrarie, e dà appunto una trasformazione  $E_m$ .

4. Per dare alle formole delle trasformazioni  $E_m$  la forma meglio adatta al nostro scopo, introduciamo parametri isometrici  $u, v$  sulla sfera, e scriviamo il  $ds'^2$  sotto la forma

$$ds'^2 = e^{-2\theta} (du^2 + dv^2),$$

onde il  $ds^2$  della superficie minima  $\bar{\Sigma}$  potrà scriversi

$$ds^2 = e^{2\theta} (du^2 + dv^2).$$



Convieni anche trascrivere le formole relative ai coseni di direzione del triedro principale ( $X_1, X_2, X_3$ ), e cioè:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - e^{-\theta} X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial u} = e^{-\theta} X_1 \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 + e^{-\theta} X_3, & \frac{\partial X_3}{\partial v} = -e^{-\theta} X_2. \end{cases}$$

Ed ora riportiamo dal § 351 delle *Lezioni* (vol. II) le formole di trasformazione per le superficie minime scritte sotto forma lineare nelle quattro funzioni incognite

$$\lambda, \mu, w, \varphi;$$

abbiamo il sistema fondamentale seguente:

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} \mu + (me^{\theta} - e^{-\theta})w + me^{-\theta} \varphi, & \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda, \\ & \frac{\partial w}{\partial u} = e^{-\theta} \lambda, & \frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{\theta} \lambda \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \mu, & \frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda + (me^{\theta} + e^{-\theta})w - me^{-\theta} \varphi, \\ & \frac{\partial w}{\partial v} = -e^{-\theta} \mu, & \frac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{\theta} \mu, \end{cases}$$

dove  $m$  indica una costante arbitraria. Questo sistema (completamente integrabile) possiede l'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2m\varphi w = \text{cost},$$

e, per ottenere una trasformazione  $D_m$  della superficie minima  $\bar{\Sigma}$ , occorre dare un valore nullo alla costante del secondo membro, onde risulta

$$(A^*) \quad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\varphi w.$$

Se indichiamo con  $(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $(\xi', \eta', \zeta')$  le coordinate di due punti corrispondenti sopra  $\bar{\Sigma}$ ,  $\bar{\Sigma}'$ , abbiamo (*Lezioni*, loc. cit.):

$$(6) \quad \xi' = \xi - \frac{1}{mw} (\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3), \text{ ecc.}$$

mentre i coseni di direzione ( $X'_3, Y'_3, Z'_3$ ) della normale alla  $\bar{\Sigma}'$  sono dati da

$$(7) \quad X'_3 = \frac{1}{m\varphi} \{ \lambda X_1 + \mu X_2 + (w - m\varphi) X_3 \}, \text{ ecc.}$$

5. Ciò premesso, denotiamo con  $x, y, z$  le coordinate di un punto mobile sulla superficie  $\Sigma$  ed avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = r_2 \frac{\partial X_3}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = r_1 \frac{\partial X_3}{\partial v},$$

ossia per le (5)

$$(8) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = e^{-\theta} r_2 X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -e^{-\theta} r_1 X_2,$$

dove i raggi principali di curvatura soddisferanno alle equazioni di Codazzi

$$(9) \quad \frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u} (r_1 - r_2), \quad \frac{\partial r_2}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v} (r_2 - r_1).$$

Siano ora  $x', y', z'$  le coordinate del punto corrispondente sulla  $\Sigma'$  dedotta dalla  $\Sigma$  con una  $E_m$  (n. 3). Siccome la congiungente i punti  $(x, y, z)$ ,  $(x', y', z')$  deve essere parallela a quella dei punti  $(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $(\xi', \eta', \zeta')$ , dalle (6) risulta che potremo porre

$$(10) \quad x' = x + \tau(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3)$$

colle altre due analoghe, dove rimarrà da determinare  $\tau$  in modo conveniente. Per questo ci serviamo della condizione che la normale alla  $\Sigma'$  deve avere i coseni di direzione  $(X'_3, Y'_3, Z'_3)$ , e quindi sussistono le due relazioni

$$SX'_3 \frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad SX'_3 \frac{\partial x'}{\partial v} = 0.$$

Calcolando queste, mediante le (5), le (8) e le (A), si ottiene per  $\tau$  il sistema lineare del primo ordine:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial u} = - \left( e^{\theta} \frac{\lambda}{\varphi} + e^{-\theta} \frac{\lambda}{w} \right) \tau - \frac{e^{-\theta} r_2}{m} \frac{\lambda}{\varphi w} \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} = - \left( e^{\theta} \frac{\mu}{\varphi} - e^{-\theta} \frac{\mu}{w} \right) \tau + \frac{e^{-\theta} r_1}{m} \frac{\mu}{\varphi w} \end{cases}$$

Questo è un sistema completamente integrabile, e si ha con una quadratura l'integrale generale dalla formola

$$(12) \quad \varphi w \cdot \tau = C - \frac{1}{m} \int (e^{-\theta} r_2 \lambda du - e^{-\theta} r_1 \mu dv),$$

con  $C$  costante arbitraria, l'espressione sotto il segno  $\int$  essendo in effetto un differenziale esatto, a causa delle (A) e delle (9).



Le formole (10) definiscono le superficie  $\Sigma'$  trasformate della  $\Sigma$  per una  $E_m$ , dove figurano, oltre  $m$ , tre costanti arbitrarie. Si osservi che le normali a  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  in punti corrispondenti s'incontrano in un punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , le cui coordinate sono

$$(13) \quad x_0 = x + m\varphi\tau X_3,$$

e queste definiscono la superficie  $S$  luogo dei centri delle sfere, colle due falde  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  dell'inviluppo. Il raggio  $R$  delle sfere è dato da

$$(13^*) \quad R = m\varphi\tau.$$

6. Ora passiamo a verificare che questo valore  $R$  soddisfa all'equazione (I) n. 2, la quale nel caso attuale diventa

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{R + r_2} \frac{\partial R}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{R + r_1} \frac{\partial R}{\partial v} \right) = e^{-2\theta}.$$

Dalla (13\*) derivando, otteniamo per le (A) e per le (II):

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -e^{-\theta} (R + r_2) \frac{\lambda}{w}, \quad \frac{\partial R}{\partial v} = e^{-\theta} (R + r_1) \frac{\mu}{w}.$$

e la precedente diventa

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( e^{-\theta} \frac{\mu}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( e^{-\theta} \frac{\lambda}{w} \right) = e^{-2\theta}.$$

Eseguendo le derivazioni colle (A), questa si riduce subito alla (A\*) e trovasi quindi verificata.

In modo simile si potrebbe riscontrare, colle precedenti, che  $R = m\varphi\tau$  soddisfa anche la (II) n. 2; ma questo segue anche da che sulle due falde  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  dell'inviluppo di sfere si corrispondono le linee di curvatura, e per ciò (Nota B) sulla superficie  $S$  luogo dei centri il corrispondente sistema  $(u, v)$  è coniugato.

Dopo queste verifiche risulta dal n. 2 che la superficie  $S$  ammette una deformata per flessione  $S_0$ , tale che in  $S_0$  i termini dei segmenti vengono ad avere per luogo un piano  $\pi$ , sicchè quando  $S_0$  rotola sopra  $S$  il piano  $\pi$  inviluppa la superficie  $\Sigma$ . Così, in effetto, ad ogni trasformazione  $E_m$  della superficie  $\Sigma$  corrisponde una generazione di questa superficie come inviluppo di rotolamento; la superficie  $S$  d'appoggio è la superficie luogo dei centri delle sfere e la rotolante  $S_0$  si ha con quadrato.

7. Fra le superficie  $\Sigma$  a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura vi sono le superficie coi due sistemi di linee di curvatura piane, le cui immagini sferiche delle linee di curvatura sono due fasci ortogonali di cerchi. Però noi qui considereremo solo il caso generale quando le due rette, coniugate rispetto alla sfera, che sono gli assi dei due fasci di piani dei

circoli non sono tangenti alla sfera e non passano per il centro. In questo caso Eisenhart ha dimostrato (n. 8, m. c.) che, se si prende  $= \frac{1}{2}$  la costante della trasformazione  $E_m$ , questa può applicarsi in guisa che anche la trasformata  $\Sigma'$  abbia linee di curvatura piane, ed allora la superficie  $S$  luogo dei centri delle sfere è una *superficie di traslazione* con curve generatrici in piani perpendicolari, e queste curve danno il sistema coniugato corrispondente alle linee di curvatura di  $\Sigma$ .

È d'altra parte noto (cfr. *Lezioni*, vol. II, § 252) che queste superficie di traslazione ammettono una deformazione continua ad un parametro che conserva coniugato il detto sistema, le curve generatrici mantenendosi in piani perpendicolari; quindi se ne conclude che la superficie rotolante  $S_0$  è appunto una di queste deformate.

Ma noi vogliamo ora invertire queste considerazioni e dimostrare il teorema:

*Sopra una superficie  $S$  di traslazione, con curve generatrici in piani perpendicolari, si faccia rotolare una superficie applicabile  $S_0$  della medesima classe, che trasporti seco, come piano satellite, un piano  $\pi$  ortogonale ad ambedue i sistemi di piani delle curve di traslazione di  $S_0$ . Questo piano  $\pi$  involuppa una superficie  $\Sigma$  coi due sistemi di linee di curvatura piane.*

In questo modo si ottiene, come involuppo di rotolamento, qualunque superficie a linee di curvatura piane della classe generale sopra indicata.

8. Alla dimostrazione del teorema enunciamo premettiamo la deduzione di alcune formole più generali, che tornano utili in altre ricerche. Consideriamo una superficie  $S_0$ , pel momento arbitraria, ed i segmenti rettilinei calati dai punti di  $S_0$  normalmente sopra un piano fisso  $\pi$ , che prendiamo per piano  $xy$ ; e questi segmenti si pensino invariabilmente collegati alla  $S_0$  nelle sue flessioni. Se la  $S_0$  assume, deformandosi, la configurazione  $S$ , il luogo dei termini dei detti segmenti diventerà una superficie  $\Sigma$ , ortogonale ai segmenti stessi, e noi vogliamo calcolare gli elementi relativi alla congruenza delle normali di  $\Sigma$ .

Come nella mia prima Memoria sul rotolamento <sup>(1)</sup>, scriviamo le equazioni parametriche di  $S_0$  sotto la forma ordinaria

$$x_0 = u \quad , \quad y_0 = v \quad , \quad z_0 = z_0(u, v) ,$$

e facciamo uso delle notazioni di Monge

$$p = \frac{\partial z_0}{\partial u} \quad , \quad q = \frac{\partial z_0}{\partial v} \quad , \quad r = \frac{\partial^2 z_0}{\partial u^2} \quad , \quad s = \frac{\partial^2 z_0}{\partial u \partial v} \quad , \quad t = \frac{\partial^2 z_0}{\partial v^2}$$

<sup>(1)</sup> *Alcune ricerche sul rotolamento di superficie applicabili* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVIII, an. 1914).



per le derivate prime e seconde di  $z_0$ . I coefficienti  $E_0, F_0, G_0$ ;  $D_0, D'_0, D''_0$  delle due forme fondamentali di  $S_0$  in coordinate  $u, v$  saranno:

$$E_0 = 1 + p^2, \quad F_0 = pq, \quad G_0 = 1 + q^2$$

$$D_0 = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D'_0 = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D''_0 = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Per la deformata  $S$  i coefficienti della prima forma restano gli stessi  $E_0, F_0, G_0$ , e quelli della seconda si indicheranno con  $D, D', D''$ .

Ora i coseni di direzione  $\alpha, \beta, \gamma$  dei raggi della congruenza delle normali a  $\Sigma$ , nella configurazione  $S$ , sono dati dalle formole (M. c., § 8)

$$\alpha = \frac{p}{1 + p^2 + q^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{q}{1 + p^2 + q^2} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{X}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

colle analoghe per  $\beta, \gamma$  avendo indicato con  $x, y, z$  le coordinate di un punto mobile su  $S$ , con  $X, Y, Z$  i coseni di direzione della normale.

Dal calcolo eseguito al § 21 della Memoria ora citata, introducendo i coefficienti delle due forme fondamentali della congruenza:

$$\begin{cases} E' = S \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2, & F' = S \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v}, & G' = S \left( \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2 \\ e = S \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u}, & f = S \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, & f' = S \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, & g = S \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

risultano i valori seguenti:

$$(15) \quad \begin{cases} E' = A^2 + A'^2, & F' = A'(A + A''), & G' = A'^2 + A''^2 \\ e = -A, & f = f' = -A', & g = -A'', \end{cases}$$

dove abbiamo posto per brevità

$$(16) \quad A = \frac{D - D_0}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad A' = \frac{D' - D'_0}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad A'' = \frac{D'' - D''_0}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Di qui, formando l'equazione differenziale delle sviluppabili della congruenza, e sopprimendo il fattore non nullo  $AA'' - A'^2$ , troviamo

$$(17) \quad A' du^2 + (A'' - A) du dv - A' dv^2 = 0.$$

Ora supponiamo che la superficie  $S_0$  sia una superficie di traslazione, colle curve generatrici in piani paralleli ai piani coordinati  $x = 0, y = 0$ , onde sarà  $D'_0 = 0$ , cioè  $s = 0$ . Supponiamo di più che anche la  $S$  sia di traslazione colle curve generatrici  $u = \text{cost}, v = \text{cost}$ , ed avremo anche  $D' = 0$ , e per ciò  $A' = 0$ . Allora la (17) dimostra che le sviluppabili della congruenza sono le  $u = \text{cost}, v = \text{cost}$ , cioè a dire: *al sistema coniugato comune di  $(S, S_0)$  corrisponde sopra  $\Sigma$  il sistema delle linee di curvatura.*

Proviamo che queste sono curve piane, verificando che le loro immagini sferiche sono circoli, Dalle (15) abbiamo per  $ds'^2$  sferico

$$ds'^2 = A^2 du^2 + A''^2 dv^2,$$

e se denotiamo con  $\frac{1}{\varrho'_u}$ ,  $\frac{1}{\varrho'_v}$  le curvature geodetiche delle linee sferiche  $u = \text{cost}$ ,  $v = \text{cost}$  valgono le formole

$$-\frac{1}{\varrho'_u} = \frac{1}{AA''} \frac{\partial A''}{\partial u}, \quad -\frac{1}{\varrho'_v} = \frac{1}{AA''} \frac{\partial A}{\partial v}.$$

Ma in generale dalle equazioni di Codazzi e di Gauss risultano le seguenti:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial A'}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{q}{1+p^2+q^2} (tA - 2sA' + rA'') \\ \frac{\partial A'}{\partial v} - \frac{\partial A''}{\partial u} = \frac{p}{1+p^2+q^2} (tA - 2sA' + rA'') \\ A A'' - A'^2 = -\frac{tA - 2sA' + rA''}{1+p^2+q^2}. \end{cases}$$

Applicandole al caso attuale ove  $A' = 0$ , ne risulta

$$\frac{1}{\varrho'_u} = -p, \quad \frac{1}{\varrho'_v} = -q,$$

quindi  $\frac{1}{\varrho'_u}$  è funzione di  $u$  soltanto,  $\frac{1}{\varrho'_v}$  di  $v$  soltanto cioè le linee  $u = \text{cost}$ ,  $v = \text{cost}$  sono circoli. c. d. d.

9. Terminiamo col dare, in termini finiti, le equazioni delle due superficie applicabili di traslazione  $S_0$ ,  $S$  e quelle della superficie  $\Sigma$  a linee di curvatura piane come involuppo di rotolamento.

Scriviamo prima le equazioni parametriche della  $S_0$ :

$$S_0) \quad x_0 = u, \quad y_0 = v, \quad z_0 = \varphi(u) + \psi(v),$$

con  $\varphi(u)$ ,  $\psi(v)$  rispettive funzioni arbitrarie, la prima di  $u$ , la seconda di  $v$ . Quelle della superficie applicabile  $S$  della medesima classe, dipendenti da una costante arbitraria  $k$ , saranno:

$$S) \quad x = \int \sqrt{1 + (1 - k^2) \varphi'^2(u)} du, \quad y = \int \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \psi'^2(v)} dv,$$

$$z = k\varphi(u) + \frac{\psi(v)}{k},$$

$$\left( \varphi'(u) = \frac{d\varphi}{du}, \quad \psi'(v) = \frac{d\psi}{dv} \right).$$



Calcolando di qui, secondo le (14), i coseni  $\alpha, \beta, \gamma$ , ove si ponga per brevità:

$$\sqrt{1 + (1 - k^2) \varphi'^2(u)} = U, \quad \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \psi'^2(v)} = V,$$

troviamo:

$$(18) \quad \alpha = \frac{\varphi'(u)(U - kV)}{1 + \varphi'^2(u) + \psi'^2(v)}, \quad \beta = \frac{\psi'(v)\left(V - \frac{U}{k}\right)}{1 + \varphi'^2(u) + \psi'^2(v)}$$

$$\gamma = \frac{k\varphi'^2(u) + \frac{\psi'^2(v)}{k} + UV}{1 + \varphi'^2(u) + \psi'^2(v)}.$$

Da queste formole seguono le altre

$$\begin{cases} U\alpha + \varphi'(u)(k\gamma - 1) = 0 \\ V\beta + \frac{\psi'(v)}{k}(\gamma - k) = 0 \end{cases}$$

le quali dimostrano che le linee sferiche  $u = \text{cost}$  sono circoli i cui piani passano per la retta

$$x = 0, \quad z = \frac{1}{k},$$

e le  $v = \text{cost}$  circoli nei piani per la retta

$$y = 0, \quad z = k;$$

queste due rette sono polari reciproche rispetto alla sfera (non tangenti).

Quanto alle coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  di un punto della superficie  $\Sigma$  a linee di curvatura piane  $u, v$  considerata come involuppo di rotolamento, sono date dalle formole

$$(19) \quad \begin{cases} \xi = \int \sqrt{1 + (1 - k^2) \varphi'^2(u)} du - [\varphi(u) + \psi(v)] \alpha \\ \eta = \int \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \psi'^2(v)} dv - [\varphi(u) + \psi(v)] \beta \\ \zeta = k\varphi(u) + \frac{\psi(v)}{k} - [\varphi(u) + \psi(v)] \gamma. \end{cases}$$

avendo  $\alpha, \beta, \gamma$  i valori (18).

Il teorema enunciato alla fine del n. 7 è così dimostrato. Osserviamo da ultimo il caso particolare notevole che la superficie  $S_0$  di traslazione sia il paraboloide rotondo, col piano direttore come piano satellite: *Se il paraboloide rotondo rotola sopra una delle sue  $\infty^1$  superficie di traslazione applicabili, il piano direttore involuppa la più generale superficie minima a linee di curvatura piane* (esclusa la superficie minima d'Enneper ed il catanoide).

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota III del Socio VITO VOLTERRA.

35. Passiamo a dare la soluzione del problema nel caso in cui gli elettrodi, supposti di resistenza trascurabile, costituiscano delle porzioni del contorno. Ritorniamo quindi alle condizioni esaminate nel § 3.

Supponiamo che si sia potuto rappresentare conformemente l'area  $\sigma$ , semplicemente connessa (fig. 3), entro un parallelogrammo  $abcd$  nel piano  $\xi, \eta$  in modo tale che sia

$$\widehat{bad} = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

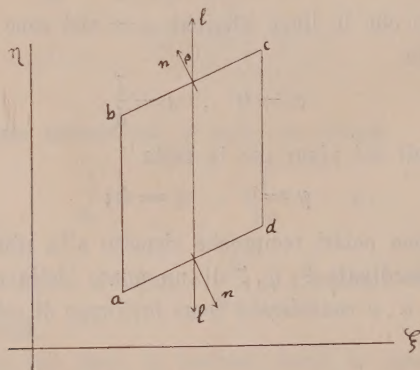


FIG. 18.

Supponiamo, inoltre, che i lati  $ab$  e  $cd$  siano paralleli all'asse  $\eta$ , e che i tratti dei contorni  $ab$  e  $AB$ ,  $bc$  e  $BC$ ,  $cd$  e  $CD$ ,  $da$  e  $DA$  si corrispondono rispettivamente.

Prendiamo la funzione

$$V = M\xi + N,$$

ove  $M$  ed  $N$  denotano due costanti, e consideriamo  $V$  come funzione di  $\xi$  e  $\eta$ . Essa sarà costante lungo i lati  $ab$  e  $cd$ , e lungo  $bc$  e  $ad$  avremo

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0.$$

È facile riconoscere che lungo  $bc$  e  $cd$  le direzioni  $\eta$  e  $-\eta$  sono rispet-



tivamente inclinate dell'angolo  $\beta$  rispetto alla normale esterna  $n$  ai lati stessi.

Consideriamo ora  $\xi$  come funzione di  $x$  e  $y$ , e riportiamo la funzione  $V$  sopra l'area  $\sigma$  nel piano  $x, y$ . Essa risulterà armonica e regolare, sarà costante sopra le porzioni del contorno  $AB$  e  $CD$ , mentre lungo le porzioni  $BC$  e  $AD$ , avremo

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0.$$

Servendoci dell'arbitrarietà delle costanti  $M$  ed  $N$ , potremo ridurre i valori di  $V$  eguali ai valori dati lungo  $AB$  e  $CD$ , e perciò  $V$  sarà il potenziale richiesto. È facile riconoscere l'ordine di infinito delle derivate di  $\xi$  rispetto a  $x$  e  $y$  nei punti angolosi del contorno.

36. Supponiamo che  $\sigma$  sia un quadrato. Cominciamo dal prendere sull'asse reale del piano complesso  $z$  due punti  $a$  e  $-a$ , e poniamo

$$(13) \quad Z = \int_{\eta}^z (a^2 - z^2)^{\nu-1} dz$$

$$(13') \quad Z_1 = \int_{\eta}^z (a^2 - z^2)^{\mu-1} dz.$$

Mentre  $z$  si muove nel semipiano corrispondente al coefficiente dell'immaginario positivo,  $Z$  e  $Z_1$  si muovono rispettivamente entro due triangoli

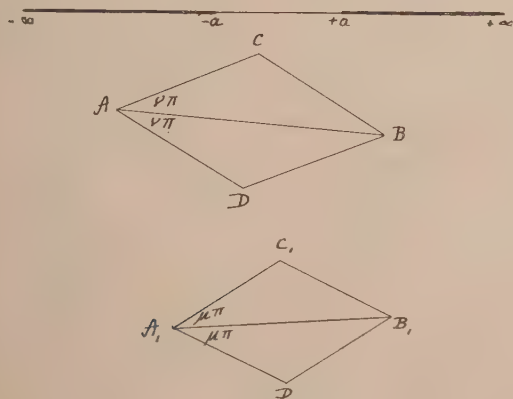


FIG. 19.

isosceli  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$  i cui angoli alla base hanno rispettivamente le aperture  $\nu\pi$  e  $\mu\pi$ . Applicando quindi il principio di simmetria, mentre  $z$  percorre tutto il suo piano sezionato con due tagli  $-a - \infty$  e  $+a + \infty$   $Z$  e  $Z_1$  si muovono rispettivamente nei rombi  $ACBD$  e  $A_1C_1B_1D_1$ .

Prendendo  $\nu = \frac{1}{4}$  il primo rombo diventa un quadrato, e prendendo

$$\mu = \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2\pi}$$

il secondo rombo diviene un parallelogrammo avente un angolo eguale a  $\frac{\pi}{2} - \beta$ . Per mezzo di una rotazione

$$Z'_1 = Z_1 e^{i(\frac{1}{2} - \mu)\pi}$$

si riduce il secondo rombo ad avere una coppia di lati paralleli ad un asse, e perciò ci mettiamo nelle condizioni della figura 18 ed otteniamo la rappresentazione conforme del quadrato nel parallelogrammo, che ci risolve il problema di determinare il potenziale e la distribuzione delle correnti in una lamina quadrata soggetta ad un campo magnetico, allorchè due lati opposti sono i due elettrodi di resistenza nulla da cui entra ed esce la corrente, gli altri due lati sono liberi ed isolati.

È ovvio che avendo preso  $\nu = \frac{1}{4}$ , l'integrale (13) è ellittico, ed infatti ponendo  $a^2 - z^2 = x^4$ , e  $a = 1$ , si ha

$$Z = \int_0^z \frac{dz}{(a^2 - z^2)^{\frac{3}{4}}} = -2 \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

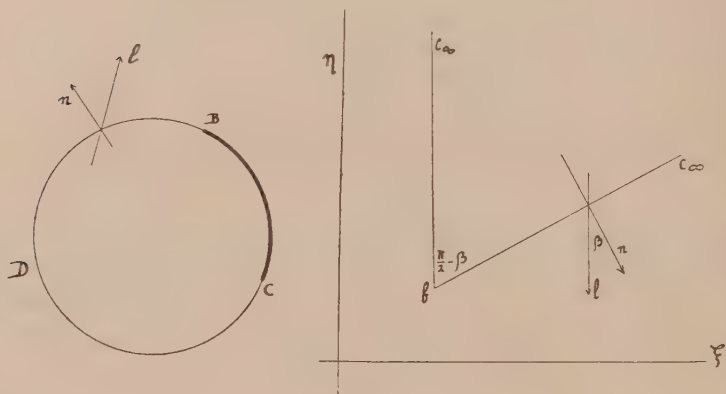


FIG. 20.

37. Esaminiamo ora il caso considerato nel § 6, e supponiamo che la lamina sia circolare. Tutta la questione si riduce a costruire una funzione armonica regolare  $W$  di cui si conosce il valore lungo l'arco BC, mentre si conosce il valore di  $\frac{dW}{dl}$  lungo l'arco CDB.



Rappresentiamo conformemente il cerchio entro un angolo di apertura  $\frac{\pi}{2} - \beta$  nel piano  $\xi\eta$  (fig. 20), in modo che il lato  $bc_\infty$  parallelo ad  $\eta$  corrisponda all'arco BC, ed il lato inclinato  $bc_\infty$  corrisponda all'arco BDC il vertice B corrisponda a B e il punto  $c_\infty$  all'infinito al punto C. Riportiamo nell'angolo i valori di W. Allora  $\frac{\partial W}{\partial \eta}$  sarà nota sopra i due lati dell'angolo, e poichè è armonica, potremo calcolare  $\frac{\partial W}{\partial \eta}$  internamente all'angolo, d'onde si ricaverà W.

È evidente che si giungerebbe allo stesso risultato se un lato dell'angolo fosse parallelo a  $\xi$  e corrispondesse all'arco BC, e l'altro lato inclinato corrispondesse all'arco BDC e si considerasse il  $\frac{\partial W}{\partial \xi}$  anzichè il  $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ .

Ma per trattare questo caso, che svolgeremo nei §§ seguenti, è utile impiegare le funzioni di variabili complesse introdotte alla fine del § 14. È specialmente interessante esaminare la questione quando  $\beta = \frac{n-2}{n} \pi$ , giacchè mediante una opportuna rappresentazione conforme e quindi l'applicazione del doppio principio delle immagini considerato (§ 18) si giunge alla soluzione in modo molto semplice.

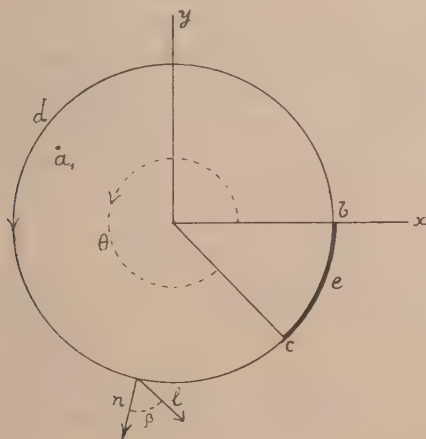


FIG. 21.

### 38. Mediante la funzione

$$Z = \frac{ze^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{z - 1}$$

si rappresenta (fig. 21) l'area interna ad un cerchio di raggio 1, col centro

all'origine, situato nel piano  $z$ , nel semipiano  $Z = X + iY$  (fig. 22) corrispondente ai valori positivi di  $Y$ . Se consideriamo i punti del contorno del cerchio aventi per indice  $z = e^{i\omega}$  si trova per  $Z$

$$Z = \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}},$$

quindi corrispondono ai punti dell'asse reale nel piano  $Z$ , ed in particolare a  $0 < \omega < \theta$  corrisponde il semiasse reale negativo, e a  $\theta < \omega < 2\pi$  corrisponde il semiasse reale positivo.

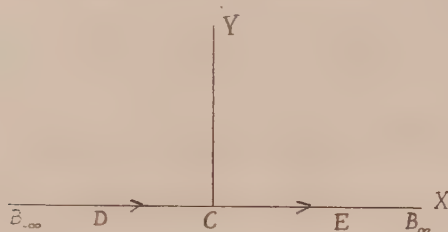


FIG. 22.

Supposto

$$0 < \mu < 1,$$

e posto  $\zeta = Z^\mu$  si ottiene la rappresentazione conforme del semipiano nell'angolo di apertura  $\pi\mu$  (fig. 23) in modo che al semiasse reale positivo in  $Z$  corrisponde il semiasse reale positivo in  $\zeta$ , e al semiasse reale negativo il raggio spiccato dall'origine  $\gamma$  inclinato di  $\pi\mu$  sul detto semiasse positivo, ossia mediante

$$(14) \quad \zeta = \left( \frac{ze^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{z - 1} \right)^\mu$$

rappresenteremo il cerchio nell'angolo.

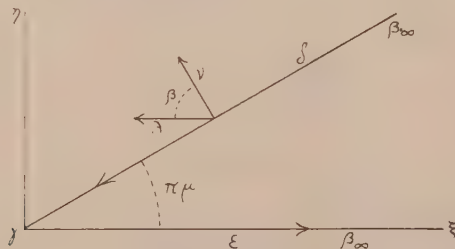


FIG. 23.

Posto

$$z = r e^{i\omega}, \quad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\varphi}$$

per  $0 < \omega < \theta$ ,  $r=1$ , avremo

$$\zeta = \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu} e^{i\mu\pi}, \quad \text{cioè} \quad \varrho = \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \varphi = \mu\pi$$

per  $\theta < \omega < 2\pi$ ,  $r=1$ , avremo

$$\zeta = \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \text{cioè} \quad \xi = \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \eta = 0.$$

Derivando le relazioni

$$\varrho = \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \xi = \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}$$

rispettivamente rapporto a  $\varrho$  e a  $\xi$ , si trova

$$1 = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu} \frac{d\omega}{d\varrho} = -\frac{\mu}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\left( \operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \right)^{1-\mu} \left( \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}} \frac{d\omega}{d\varrho}$$

$$1 = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu} \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\mu}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\left( \operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \right)^{1-\mu} \left( \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}} \frac{d\omega}{d\xi},$$

d'onde

$$(15) \quad \frac{d\omega}{d\varrho} = -\frac{2}{\mu} \frac{\left( \operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \right)^{1-\mu} \left( \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \quad 0 < \omega < \theta$$

$$(15') \quad \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{2}{\mu} \frac{\left( \operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \right)^{1-\mu} \left( \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \quad \theta < \omega < 2\pi.$$

Abbiasi ora la funzione  $w(z) = u + iv$  regolare entro il cerchio e al contorno di esso. Consideriamе  $z$  come funzione di  $\zeta$  invertendo la (14), e sostituiamo nella precedente funzione, otterremo

$$w(z(\zeta)) = w_1(\zeta)$$



che sarà regolare nell'interno e al contorno dell'angolo. Calcoliamo

$$(16) \quad u_2 + i v_2 = w_2(\zeta) = \frac{dw_1}{d\zeta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Per far ciò supponiamo noti i valori di  $u$  lungo l'arco  $ceb$  in funzione di  $\omega$ . Denotiamoli con  $L(\omega)$  e formiamo la loro derivata rispetto ad  $\omega$  che indicheremo con  $L'(\omega)$ .

Sia poi  $l$  una direzione inclinata dell'angolo  $\beta = \frac{\pi}{2} - \pi\mu$  sulla normale esterna  $n$  al cerchio, e formiamo  $\frac{\partial u}{\partial l}$  che indicheremo con  $M(\omega)$ . Ciò posto avremo lungo il semiasse  $\xi$  positivo  $\gamma\delta\beta_\infty$  in virtù della (15')

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\xi} = L'(\omega) \frac{2}{\mu} \frac{\left(\sin \frac{\omega - \theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

e lungo il lato  $\gamma\delta\beta_\infty$  se  $\lambda$  è inclinata di  $\beta$  rispetto alla normale  $v$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \xi} = - \frac{\partial u}{\partial \lambda} = - \frac{\partial u}{\partial l} \left(- \frac{d\omega}{d\varrho}\right) = - M(\omega) \frac{2}{\mu} \frac{\left(\sin \frac{\theta - \omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Se nella (16) sostituiamo a  $\xi$  il valore (14), otterremo

$$w_2(\zeta(z)) = u_2(x, y) + i v_2(x, y)$$

e  $u_2$  lungo l'arco  $bdc$  sarà

$$- \frac{2}{\mu} M(\omega) \frac{\left(\sin \frac{\theta - \omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

e lungo l'arco  $ceb$  sarà

$$\frac{2}{\mu} L'(\omega) \frac{\sin \left(\frac{\omega - \theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Dunque noi conosciamo al contorno del cerchio i valori della parte reale  $u_2$  della funzione  $w_2(\zeta(z))$ . Ci sarà per conseguenza facile, applicando una formula ben nota, calcolare  $w_2$  entro il cerchio. La formula che impiegheremo sarà

$$w_2(\zeta(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(\omega) \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} d\omega + iC,$$

ove con  $u_2(\omega)$  si sono denotati i valori di  $u_2$  al contorno del cerchio, e  $C$  è una costante reale.

Resulterà quindi, poichè per  $z=1$  deve aversi  $w_2=0$ ,

$$w_2(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi\mu} \int_0^\theta M(\omega) \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z} - \frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right) d\omega \\ + \frac{1}{\pi\mu} \int_\theta^{2\pi} L'(\omega) \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z} - \frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right) d\omega.$$

Ma dalla (14) segue

$$\frac{d\zeta}{dz} = 2\mu i e^{i\frac{\theta}{2}(1-\mu)} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{(z - e^{i\theta})^{1-\mu} (z - 1)^{1+\mu}},$$

per conseguenza con operazioni semplici potremo calcolare

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = w_2(\zeta(z)) \frac{d\zeta}{dz},$$

ed otterremo

$$(17) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{2}{\pi} \frac{e^{i\frac{\theta}{2}(1-\mu)}}{(z - e^{i\theta})^{1-\mu} (z - 1)^{1+\mu}} \left\{ \int_0^\theta M(\omega) \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^\mu e^{i\frac{\omega}{2}}}{z - e^{i\omega}} d\omega \right. \\ \left. - \int_\theta^{2\pi} L'(\omega) \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^\mu e^{i\frac{\omega}{2}}}{z - e^{i\omega}} d\omega \right\}.$$

Con una quadratura calcoleremo quindi  $w$  a meno di una costante, e separando la parte reale dalla parte immaginaria si avrà la funzione armonica  $u$  a meno di una costante che si determinerà facilmente.

Dunque, se lungo l'arco  $bdc$  conosciamo  $\frac{\partial u}{\partial l}$ , e lungo l'arco  $ceb$  conosciamo  $u$ , potremo ricavare la funzione armonica  $u$  entro il cerchio.

Da quanto è stato stabilito nel § 6 si vede che il problema della distribuzione delle correnti in una lamina circolare, allorchè la corrente entra da uno (o anche da più) elettrodi puntiformi interni ed esce da un elettrodo costituito da un arco del contorno di resistenza trascurabile, è completamente risolubile applicando le formule precedenti.

La quadratura da eseguirsi per ricavare  $w$  dalla (17) si calcola facilmente allorchè  $\mu = \frac{1}{n}$ , essendo  $n$  un numero intero. Ma in questo caso il metodo delle immagini ci conduce, come vedremo nel paragrafo seguente, molto più facilmente alla soluzione.

39. Sia  $\alpha_1$  un punto interno all'angolo  $\delta\gamma\epsilon$  che supporremo di ampiezza  $\pi\mu = \frac{\pi}{n}$ , essendo  $n$  un numero intero.

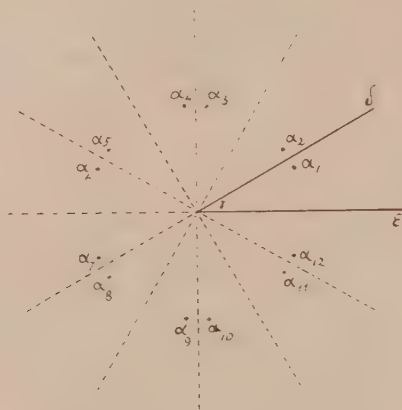


FIG. 24.

Completiamo la divisione dello spazio in angoli tutti eguali a  $\frac{\pi}{n}$ , e specchiamo il punto  $\alpha_1$  nei diversi raggi ottenendo i punti  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  <sup>(1)</sup>. Formiamo quindi le due funzioni della variabile complessa  $\zeta$

$$(18) \quad \Phi = \sum_{h=1}^n e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[ \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{2\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right]$$

$$(18') \quad F = \sum_{h=1}^n e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[ e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right],$$

le quali sono legate dalla relazione

$$(18'') \quad F = e^{\frac{\pi i}{n}} \Phi$$

e studiamone le proprietà. È facile riconoscere che ciascun termine non cambia mutando  $h$  in  $h + n$ . Infatti

$$\alpha_g = \alpha_{g+2n},$$

<sup>(1)</sup> Nella figura 24 abbiamo preso  $n = 6$ ,  $\beta = 60^\circ$ . Osserviamo che il minimo valore di  $n$  è 2, nel qual caso si ha  $\beta = 0$ .



giacchè dopo  $2n$  riflessioni le immagini si riproducono, ed inoltre abbiamo

$$e^{-\frac{2(h+n-1)\pi i}{n}} = e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}}.$$

Potremo dunque in qualsiasi termine sostituire  $h'$  ad  $h$ , senza alterarlo, purchè sia

$$h' \equiv h \pmod{n}.$$

Ciò posto  $\alpha_{2h-1}$  e  $\alpha_{2k}$  sono immagini l'uno dell'altro rispetto al raggio  $\gamma e$  quando

$$2h - 1 + 2k = 2n + 1,$$

e  $\alpha_{2h-1}$  e  $\alpha_{2k}$ , sono immagini l'uno dell'altro rispetto al raggio  $\gamma d$  quando

$$2h - 1 + 2k' = 2n + 3.$$

Dalle equazioni precedenti si ricava

$$k = n - h + 1, \quad k' = n - h + 2.$$

Prendiamo ora i due termini seguenti della somma (18)

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1}), \\ & - e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{2\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}) = - e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}). \end{aligned}$$

La loro somma sarà

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}),$$

ed essa avrà costante la parte reale sul raggio  $\gamma e$  (cfr. § 19).

Dunque i termini di  $\Phi$  possono accoppiarsi in modo che la parte reale della somma di ciascuna coppia è costante lungo  $\gamma e$ . Ne segue che su questo raggio la parte reale di  $\Phi$  è costante.

Consideriamo i due termini della somma (18')

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}), \\ & - e^{-\frac{2(h'-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}) = e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}). \end{aligned}$$

La loro somma sarà

$$e^{-\frac{(2h-3)\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{(2h-3)\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}),$$

la cui parte reale è costante lungo il raggio  $\gamma\delta$ ; dunque i termini di  $F$  possono accoppiarsi fra loro in modo che la parte reale della somma di ciascuna coppia è costante lungo  $\gamma\delta$ . Quindi anche  $F$  avrà la parte reale costante su questo raggio.

Prendiamo ora

$$(19) \quad \varphi = - \frac{J}{2\pi K} \Phi$$

$$(19') \quad f = - \frac{J}{2\pi K i \sin \frac{\pi}{n}} F.$$

È evidente che  $\varphi$  avrà la parte reale costante sul raggio  $\gamma\varepsilon$ , e  $f$  avrà la parte immaginaria costante sul raggio  $\gamma\delta$ , ossia la derivata normale della parte reale di  $f$  sarà nulla su  $\gamma\delta$ . Ma si riconosce facilmente in virtù della (18'') che

$$f = \frac{e^{-i\beta}}{\cos \beta} \varphi$$

quando si prenda  $\beta = \frac{n-2}{2n} \pi$ . Dunque, se assumiamo la parte reale di  $\varphi$  come potenziale elettrico, la parte reale di  $f$  sarà la corrispondente funzione fondamentale (§ 14). Separiamo in  $f$  e  $\varphi$  la parte reale dalla parte immaginaria scrivendo

$$\varphi = V + iV' \quad , \quad f = U + iU' ,$$

avremo allora, che  $V$  e  $U$  sono rispettivamente il potenziale elettrico, e la funzione fondamentale relativi alla distribuzione delle correnti lungo una lamina indefinita limitata dai raggi  $\gamma\varepsilon$  e  $\gamma\delta$ , quando la corrente di intensità  $J$  entri dal polo  $\alpha_1$  ed esca da un elettrodo indefinito di resistenza trascurabile disposto lungo il lato  $\gamma\varepsilon$ , mentre  $\gamma\delta$  è libero ed isolato. nella ipotesi che la lamina sia soggetta all'azione del campo magnetico, e l'angolo  $\beta$  sia

$$\left( \frac{n-2}{2n} \right) \pi .$$

40. Poniamo ora in (19) e (19') (cfr. formula (14))

$$\zeta = \left( \frac{ze^{-i\frac{\beta}{2}} - e^{i\frac{\beta}{2}}}{z - 1} \right)^{\frac{1}{n}} .$$

otterremo la rappresentazione conforme dell'angolo  $\varepsilon\gamma\delta$  (fig. 24) nel cerchio (fig. 21) ed al punto  $\alpha_1$  corrisponderà il punto  $a_1$  interno al cerchio, tale che

$$\left( \frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1} \right)^{\frac{1}{n}} = \alpha_1.$$

Ne segue che i numeri complessi  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-1}$  saranno gli  $n$  valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}},$$

mentre le  $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$  saranno i loro coniugati, cioè chiamando  $a'_1$  il numero complesso coniugato di  $a_1$  saranno gli  $n$  valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{a'_1 e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{a'_1 - 1}}.$$

Avremo dunque:

$$\text{Se } \beta = \frac{n-2}{2n} \pi, \text{ e}$$

$$\zeta = \left( \frac{z e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z - 1} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

e se le  $\alpha_{2h-1}$  e le  $\alpha_{2h}$  denotano rispettivamente gli  $n$  valori delle radici

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}}, \quad \sqrt[n]{\frac{a'_1 e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{a'_1 - 1}}$$

(essendo  $a'_1$  il coniugato di  $a_1$ ), le parti reali di

$$\varphi = -\frac{J}{2\pi K} \sum_{h=1}^n e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[ \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-2\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right]$$

$$f = -\frac{J}{2\pi K i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \sum_{h=1}^n e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[ e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right]$$

sono rispettivamente il potenziale elettrico e la funzione fondamentale di una distribuzione di correnti entro il cerchio di raggio 1 (fig. 21), allorchè la corrente entra dall'elettrodo puntiforme interno  $a_1$  ed esce



dall'elettrodo di resistenza trascurabile *bcc*, mentre la porzione *bdc* del contorno è libera ed isolata, nella ipotesi che la lamina circolare sia soggetta all'azione del campo magnetico.

41. Supponiamo adesso che l'elettrodo puntiforme  $a_1$  vada al contorno in un punto dell'arco *bdc*, avremo allora

$$\alpha_{2h-1} = \alpha_{2h}$$

e, posto  $a_1 = e^{i\omega}$  con  $\omega < \theta$ , queste quantità saranno gli  $n$  valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{e^{i\omega} - e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\omega} - 1}},$$

ossia gli  $n$  valori di

$$\left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}$$

per  $h = 1, 2, \dots, n$ , e quindi avremo

$$f = -\frac{J}{\pi K} \sum_{h=1}^n e^{-\frac{(2h-1)\pi i}{n}} \log \left( \zeta - \sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}} \right)$$

$$g = -i \frac{J \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\pi K} \sum_{h=1}^n e^{-\frac{(2h-1)\pi i}{n}} \log \left( \zeta - \sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}} \right).$$

ove per  $\sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}}$  va preso il valore positivo e si deve sempre supporre

di sostituire a  $\zeta$  l'espressione

$$\zeta = \left( \frac{e^{i\omega} - e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\omega} - 1} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

#### ERRATA CORRIGE ALLA NOTA II

Pag. 294. linea 21 *dopo le parole*: in cui manchi il campo magnetico *aggiungere*: se non per un fattore costante di proporzionalità eguale al rapporto delle conducibilità.

Pag. 301, linea 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> *invece di*: nel campo *sostituire*: alla lamina.

Pag. 301 linea 2<sup>a</sup> *dopo le parole*: il potenziale elettrico *aggiungere*: (senza campo magnetico, ma ridotto nel rapporto tra le conducibilità della lamina, prima e dopo l'azione del campo stesso).

**Geologia.** — *Ambiente geologico del terremoto della Marsica* (13 gennaio 1915). Nota del Socio CARLO DE STEFANI.

Il terremoto del 13 gennaio 1915, che turbò sì gravemente la Marsica, si è manifestato particolarmente nel versante tirreno come gli altri terremoti più violenti che in questo e nel passato secolo hanno devastato regioni italiane (Liguria, Calabria), e si è manifestato ora nella più massiccia e più elevata regione dell'Appennino, e assai dappresso al termine meridionale della medesima di fronte alle ampie valli del Volturno e del Gargigliano.

Infatti le montagne del Velino e del Sirente, i massicci della montagna Grande, del monte Genzana, del monte Greco, compresi nell'area delle più violente manifestazioni, superano i 2000 metri.

Il maggiore massiccio del Gran Sasso, e quelli, pure ragguardevoli, del Terminillo, del Pizzo di Sivo, del Morrone, della Maiella, della Meta, dei monti Simbruini ed Ernici, pur superiori ai 4000 metri, sono rimasti fuori dell'area epicentrale, sebbene in gran parte compresi nell'area sismica.

Quest'area epicentrale della Marsica è costituita da rocce tutte sedimentarie e con grande prevalenza da rocce del Secondario superiore e del Terziario. Infatti gli strati più antichi, per quanto finora si conosce, appartengono al Lias inferiore o forse al Retico. Prevalgono, come in tutta la parte centrale dell'Appennino, i calcari a scogliera della Creta.

Come si verifica il più delle volte nelle contrade i cui fondi marini, per lunghe età, non furono eccessivamente disturbati, i terreni successivi fino al Miocene medio sono quasi esclusivamente calcarei con qualche elemento organogenico siliceo, qua e là disperso. Una volta principiata la *facies* calcarea nel Trias, che talora apparisce nell'ambito dell'Appennino centrale, la *facies* si è perpetuata nel Lias, nel Giura superiore, nella Creta, nell'Eocene, perfino nel Miocene medio, ed ebbe la sua culminazione appunto nelle scogliere a *rudiste* dei mari cretacei a temperature subtropicali. Lungi dalle Alpi e dalle isole cristalline od altrimenti antiche, oggi in molta parte seppellite e scomparse, del Tirreno, della Toscana, dell'Italia centrale, delle Calabrie, le materie avventizie d'origine meccanica, grosse o sottili, tanto estese nell'Appennino settentrionale ed un poco meno nella parte meridionale che si avvicina alle Calabrie, mancarono alla parte centrale dell'Appennino della quale ora si ragiona, onde questa è quasi interamente calcarea.

Le montagne dianzi accennate e le altre minori della regione percossa, sono tutte conformate a pieghe regolari, talora lunghissime come quella che

dai monti di Fossombrone termina ai Sibillini ed al Pizzo di Sevo, talora più brevi come quella della Maiella che è quasi fuori del campo sismico.

Le dette pieghe sono costituite da alternanze di anticlinali e di sinclinali. Esse sono in massima parallele fra loro e dirette da nord-ovest a sud-est, con leggere deviazioni locali come in tutto l'Appennino a partire dal Colle di Cadibona: però nel caso nostro la loro direzione coincide con la direzione geografica dell'Appennino; anzi dà il motivo a questa, mentre da Cardibona alla Val di Magra, nell'Appennino settentrionale, esse sono normali alla direzione geografica. Non è bensì da credere che le circostanze tettoniche si manifestino sempre con assoluta semplicità, poichè anzi le pieghe si decompongono in ellissoidi allungate, isolate o reciprocamente incastrate secondo la direzione dominante, talora con fitti ripiegamenti secondari, specie quando si tratti delle rocce più plastiche, e con parziali rovesciamenti estesi fino ai terreni Miocenici e prevalentemente, sebbene non esclusivamente, secondo i due versanti adriatico o tirreno, verificatisi verso i due mari che cingono l'Appennino. Se pur nella presente regione sismica si hanno esempi di locale immersione di strati, mancano però sicuramente quei carreggiamenti di rocce da lontane regioni, sia occidentali, sia orientali, che alcuni scienziati stranieri vollero applicare più specialmente, a dir vero, agli Appennini adiacenti, fondandosi sopra le carte geologiche e sopra frasi fatte, piuttosto che sullo studio dei terreni.

Nella regione sismica della Marsica e delle contrade confinanti, come del resto in tutto l'Appennino fra la Liguria occidentale e le Calabrie, ma più assai che non nella parte settentrionale di esso, il sollevamento ha grandemente spostato i terreni del Miocene medio. Questi, nella Catena del Pizzo di Sivo sono sollevati fin sopra 2000 metri, e, oltre a ciò, prendono parte a quasi tutte le pieghe, stretti nei sinclinali, con strati non rare volte anche verticali e parzialmente invertiti. Giudico che la prima emersione della regione abbia avuto luogo durante il Miocene superiore o poco innanzi, perchè strati di tale età, poco spostati, occupano i *piani* o *campi* perfettamente eguali ai *polja* Balcanici, alquanto sopra 1000 m., in mezzo ai calcari secondari del Gran Sasso e della Maiella. Essi sono costituiti, per quel poco che se ne conosce, da argille d'acqua dolce o salmastra, talora gessifere e lignitifere. Non avrebbero potuto originarsi altro che in una regione emersa e per di più, ritengo, ancor poco alta sopra il livello del mare, perchè altrimenti i campi carsici, invece di riempirsi d'acqua e di sedimenti fangosi, si sarebbero vuotati per condotti interni, come avviene nei campi carsici più alti. Lo stesso fatto si verificò in mezzo ai calcari della penisola Balcanica; ma questa è alquanto più antica, ed i campi furono riempiti da formazioni continentali, per lo meno del Miocene medio.

Adunque nella regione nostra, dal Miocene superiore in poi, calcolo sia stato un sollevamento di alquanto più che 1000 metri.



Il Pliocene marino non litorale, nel versante adriatico, in regione rispondente alla Marsica, sale in taluni punti, verso 600 metri, e, come in tutto quel versante dell'Appennino, inclina regolarmente dal monte verso il mare. Verso il Tirreno, da quelle parti, lo stesso Pliocene sale ad altezze alquanto minori ed è, come nel rimanente versante tirreno, orizzontale o inclinato in direzioni differenti, forse anche per il maggiore frastagliamento del versante, ma non, in ogni modo, con regolarità costante, da mare a monte.

Vi è dunque una dissimmetria fra i due versanti, dalla Liguria alla Calabria, dissimmetria che non vien meno nè manco in rispondenza alla regione sismica in parola.

Cotali circostanze dimostrano, in conclusione, che il corrugamento di questa parte, come del rimanente Appennino, è relativamente recentissimo; si sarebbe anticipata di 30 anni la geologia generale dell'Appennino, qualora si fossero da 30 anni ammesse la predetta osservazione e quella estensione del Miocene da altri notata e che solo ora troppo lentamente va facendosi strada.

Risulta, inoltre che il corrugamento ha avuto per conseguenza un innalzamento degli strati, meno intenso però e con modi diversi da quelli di Liguria e di Calabria; e risulta che insieme coll'innalzamento la massa dell'Appennino, da un capo all'altro, alzandosi, descrive — si direbbe — una specie di rotazione dalla parte dell'Adriatico, avente per fulcro l'asse di questo mare. Non è escluso che tutto l'insieme di questi varî movimenti vada verificandosi tuttora, quantunque con quella lentezza che è insita a tutti i movimenti geologici misurabili solo con cicli di tempi.

Cominciata l'emersione dell'Appennino, data la concavità dei sinclinali interposti fra ogni singola piega e catena montuosa, data la natura assai più friabile ed erodibile delle rocce terziarie che ne riempiono il fondo, le acque superficiali si fecero strada in mezzo ai medesimi, entro valli longitudinali secondanti le pieghe e la direzione geografica dell'Appennino da NO a SE. In molti casi formarono anche laghi e paduli: p. es. sull'Aterno, sul Gizio, sul Liri, ecc. ecc.

Tale è il caso della più alta parte di tutte le valli principali e dei torrenti secondarii del versante Adriatico e del versante Tirreno a ponente del Gran Sasso e della Maiella (alto Sangro, Gizio, Aterno, Sagittario, Salto, Turano, Liri, Amaseno). Pur finalmente le acque dovevano andare al mare; e quando non poterono uscire per emissari di bacini lacustri precedentemente formati (come nel grande bacino del Tevere e in quello del Liri), si aprirono la strada a traverso qualche svasamento più basso, incidendolo sempre più e formandovi delle valli trasversali, *sovrimposte* come dicono i geografi, ed hanno seguitato il loro cammino riunendo *a croce* (*crosswise* secondo il Davis) le valli longitudinali confluenti incontrate per via. Così ad attestare la relativa antichità della erosione e della concomitante

degradazione meteorica principiate almeno verso la fine del Pliocene, rimangono le dette valli trasversali a V amplissimamente aperto come quelle del Pescara a valle di Popoli, del Sagittario, del Sangro, del Velino, della Nera, valli che interrompono lungamente gli anticlinali in modo da farli quasi ritenere appartenenti a catene geograficamente diverse, benchè geologicamente une.

In questo modo ritengo che, almeno nella regione presente (come del resto nell'Appennino settentrionale dalla Liguria sino alla Toscana dove il versante Tirreno è più ripido), questo versante, per mezzo di lente catture, si sia gradatamente avanzato e si vada avanzando a spese del versante adriatico. Contemporaneamente alla corrosione meccanica si è avanzata la dissoluzione chimica dei calcari, che ha dato e dà luogo ai fenomeni carsici ed alle cavità interne così generali nelle masse montuose delle quali parliamo.

Il fenomeno deve essere cominciato, pur esso, almeno al finire del Pliocene: ma ad ogni modo è assai meno progredito del fenomeno carsico della penisola Balcanica oltre l'Adriatico, perchè questa è più antica della nostra.

Tali sono i lineamenti generali litologici, stratigrafici, tettonici e morfologici della regione, e le differenze essenziali dalle altre regioni sismiche accennate, Ligure e Calabrese, dove fra altre cose i fenomeni carsici mancano o sono ben più limitati.

Queste premesse sono indispensabili per chi si proponesse tentare l'indagine sulle cause del terremoto.

Se osserviamo le località denunziate come più colpite dal terremoto, o epicentrali, queste sono situate nel fondo delle vallate, sopra i terreni più recenti dei sinclinali, perciò costituiti da terreni avventizii, con materiali mobili, relativamente poco alti sopra il fondo dei rispettivi sinclinali, quindi franosi, specialmente qualora siano in pendio. Questi terreni appunto furono turbati da fenditure, da faglie e da rovinose frane. Una linea con numerose ramificazioni, appunto come il ramo secco di un albero, riunirebbe i vari paesi più danneggiati. Questa è la conseguenza; ma non certo la disposizione dei sismi. I luoghi abitati sono lungo il pendio delle valli; solo per rara eccezione sull'alto dei pendii e sulla roccia solida. Però anche paesi situati sopra roccia solida non franosa, salvo alcune eccezioni, ebbero danni per la franosità e risentirono egualmente l'energia delle scosse. È indubitabile che le vibrazioni investirono con eguale energia tutte le località vallive e montagnose, salvo forse la maggiore dispersione avvenuta verso le alture maggiori.

Non risulta, per ora, che le cavità carsiche interne abbiano in uno od in altro punto ammortito le vibrazioni, come sarebbe da aspettarsi: ma forse ciò deriva, come accennavo, dalla poca estensione delle cavità e dall'età del fenomeno carsico.

Se delimitiamo l'area di massima intensità o epicentrale, come suol farsi con varia approssimazione per ogni terremoto, vediamo che essa descrive una ellisse limitata ad O dai monti Simbruini ed Ernici, ad E dalle catene del monte Rotella, del Morrone, del Gran Sasso, sulle cui solide pendici occidentali sono pur tanti paesi che sentirono relativamente meno danni per la solidità del sottosuolo; a N dai monti di Cittaducale e d'Antròdoco; a S dal massiccio della Meta e dagli ampi bacini inferiori del Volturno e del Garigliano i cui terreni avventizii assai alti contribuirono forse a disperdere l'energia. L'area ellittica così descritta investe non piccolo numero di pieghe appenniniche, ed investe anche la linea di spartiacque fra Adriatico e Tirreno e la parte assiale della Penisola, specialmente qualora si prescinda dai terreni vulcanici geologicamente recenti, tanto estesi lungo il litorale a ponente. Il suo asse maggiore, senza coincidere col detto spartiacque poichè rimane tutto nel versante Tirreno, diretto da NO a SE, è parallelo alla direzione geografica della Penisola e dell'Appennino ed alla direzione tettonica delle pieghe che costituiscono la regione. Quest'area sismica coincide dunque con una regione di massimo e regolare corrugamento altresì soggetta a sollevamento recente e notevole, quantunque di origine non recentissima e di velocità non grande, corrugamento e sollevamento che verosimilmente sono tuttora in azione.

Le circostanze della Calabria e della Liguria occidentale sono parte molto, parte poco differenti. La Calabria è regione di rocce eminentemente cristalline ed antiche. Le montagne vi sono antichissime, e le manifestazioni dei relativi perturbamenti tettonici, se ve ne furono, furono scontate e cessate da cicli geologici; inoltre, dopo svariate vicende geologiche, il sollevamento e l'emersione dal mare, fra i maggiori finora notati, sono geologicamente recentissimi e rapidissimi.

La Liguria occidentale è costituita pur essa prevalentemente da rocce antiche e da terreni del Paleozoico e del Secondario più antico plasmate e ripiegate, a quanto sembra, in età posteriori alla prima formazione delle montagne Calabresi e Peloritane. Ivi dunque i movimenti orogenetici, più recenti che non nella Calabria, sono più antichi che non nella Marsica. Essa pure fu soggetta ad un sollevamento abbastanza notevole dalla parte del Tirreno, con emersione dei terreni pliocenici di mare abbastanza profondo in strati orizzontali o quasi, disposti lungo il litorale odierno; ma il sollevamento successivo, atto ad innalzare strati postpliocenici relativamente recenti, è incomparabilmente minore che non in Calabria e forse alquanto minore che non nelle regioni periferiche alla Marsica. In genere il sollevamento della Penisola lungo il mare Tirreno va diminuendo d'intensità da mezzogiorno verso settentrione.

Tutte e tre le principali regioni sismiche italiane di questo e del secolo scorso combinano nel trovarsi dalla parte del mare Tirreno che dal Miocene



in poi fu ed è sede della più intensa vulcanicità. Tutte e tre le regioni, per la accennata circostanza della dissimmetria esistente fra i due versanti, presentano la particolarità che le vibrazioni sismiche provenienti a dirittura dal Tirreno in Liguria e in Calabria, o dalla parte di questo nella Marsica, rimangono attutite quando passano al versante adriatico oltre che dalla distanza anche e principalmente dalla alta veste dei terreni appartenenti al Terziario superiore, i quali, non più orizzontali o quasi, ma sempre dal più al meno inclinati, costeggiano l'Adriatico.

Dalle coincidenze sopra notate dell'area sismica della Marsica con una regione appenninica di intensissimo corrugamento e di sollevamento non antico, non ci sembra senz'altro si possa arrivare ad una origine così detta tettonica del terremoto, come si trattasse di causa ed effetto.

Nelle rocce compatte della regione scossa non fu indizio di fratture e di faglie tali da dar pretesto a considerarle come cause del sisma.

Le rocce calcaree che prendono parte alle pieghe dell'Appennino si può supporre si estendano, al più, di 3 a 4000 metri sotto il fondo dei sinclinali, p. es. sotto la valle del Liri o il lago del Fucino. Al di sotto potranno essere altri 4 a 5 km. di rocce cristalline antiche, pari a quelle di Calabria. Per quanto si può dedurre dall'osservazione, le massime piegature degli strati terrestri si originano non proprio alla superficie ma a poca distanza da questa, e si vanno perdendo a profondità non grandi, anche per la variata plasticità delle rocce e per l'aumento delle temperature e delle pressioni. Ora un terremoto così energico, e che ha avuto così estesa ripercussione come quello del 13 gennaio scorso, non può essere derivato da frattura di strati rocciosi interni non manifestatasi al di fuori, conseguente al ripiegamento loro entro una diecina di km. di profondità. Per un terremoto come questo, originatosi a profondità maggiori, occorre cercare altra causa: e questa, al solito, mi pare non possa essere che la vulcanicità.

Il mare Tirreno, dal Miocene in poi, dal Capo d'Aglia a Ustica, fu tutto un campo vulcanico, tuttora attivissimo. Il versante tirreno della Marsica, tutto lungo il litorale, dal vulcano Laziale, a Bracciano, alla Tolfa, al Cimino, a Bolsena e oltre, è accompagnato da numerosa serie di vulcani spenti, alcuni dei quali per lo meno, come i Cimini e quello di Bolsena, principiarono durante il Pliocene per terminare nel Postpliocene superiore in tempi geologicamente recentissimi. Un'altra serie di numerosi piccoli vulcani, dovuti a singole o per lo meno a brevi eruzioni posteriori al Pliocene, sta più internamente e quasi al limitare della regione epicentrale, parallelamente a questa, lungo la valle del Sacco situata in ampio sinclinale fra monti calcarei pure cretacei e terziarii. Essa termina a sud col grandioso vulcano di Rocca Monfina, situato in mezzo a rocce calcaree, probabilmente in parte sventrate ed esplose.



A settentrione poi della stessa regione epicentrale, presso Rieti, sono i due vulcanetti d'età recente ma non esattamente determinata, di Coppaeli e di San Venanzio, la cui roccia a Mellilite, rarissima altrove, merita essere ricordata perchè ricchissima di calcio; ed essendosi manifestata in mezzo a potenti masse calcaree verrebbe fatto di credere che il magma vulcanico locale interno sia sgorgato da profondità di sì pochi chilometri da assimilare parti calcaree di quelle. Ambedue i vulcani sorgono, in sostanza, come quelli della Valle del Sacco, in mezzo alle stesse rocce calcaree scosse dal presente sisma e ravvicinati assai all'asse o spartiacque dell'Appennino. Tutti questi vulcani, situati nel fondo delle depressioni, danno l'idea di essersi così manifestati nei luoghi di minore resistenza.

Secondo logiche induzioni si può ritenere che la formazione dei detti vulcani della Valle del Sacco e del territorio Reatino in mezzo ad una regione simile a quella epicentrale del terremoto attuale e soggetta essa pure alle scosse, in contrade nelle quali mai prima del Pliocene si erano manifestati vulcani, si può ritenere, dico, che sia stata preceduta da violenti terremoti che molti, se ne fossero stati testimoni, avrebbero attribuito a causa tettonica. Quando un condotto vulcanico è aperto, i terremoti circostanti sono leggeri; se il condotto è fortemente otturato, come l'Epomeo in occasione dei terremoti di Casamicciola del secolo scorso, come il Vesuvio nell'anno 79, i terremoti sono violenti, e così può essere se la così detta crosta terrestre presenta resistenze sufficienti ad impedire la nuova apertura di un vulcano. Io credo, in sostanza, che il terremoto del 13 gennaio non possa attribuirsi ad altra causa che non sia vulcanica.

Qualora la superficie terrestre avesse dovuto rompersi sotto l'energia delle scosse, ciò avrebbe avuto luogo, come nelle regioni contigue precedentemente citate, nei luoghi *minoris resistentiae*. Dice il Martinelli, in un suo lavoro preliminare <sup>(1)</sup>, che di esso terremoto « viene esclusa in modo assoluto l'origine vulcanica intesa come tentativo di eruzione in un edificio « vulcanico, e suggerita invece una causa determinante nella tettonica della « regione, *modificata, se si vuole, da trasformazione meccanica dell'energia « termica degli strati sottostanti alla crosta* ». Ma con ciò appunto si rientra nella causa vulcanica.

Già dai più antichi tempi, dopo studi del Darwin e del Dana, si ammette la coincidenza delle regioni vulcaniche con regioni di sollevamento: tale coincidenza ho ammessa da gran tempo anche in Italia, e verosimilmente andrà estesa, oltre che ai sollevamenti, anche ai corrugamenti della crosta superficiale. Le eruzioni basiche nei mari profondissimi dell'Eocene superiore dell'Appennino, là dove nei cicli geologici immediatamente prece-

(1) G. Martinelli, *Prime osservazioni sul terremoto italiano del 13 gennaio 1915* (Bull. Soc. sismol. ital., vol. XVIII).

denti non era stato indizio di vulcanicità, segnalano il primo inizio della formazione dell'Appennino e della Penisola italiana. La coincidenza del lento sollevamento e dell'intenso corrugamento, probabilmente permanenti, e della sismicità della Marsica, l'abbiamo già notata. Verosimilmente si tratta di manifestazioni multiformi di attività endogena unica, e sotto tale punto di vista la causa vulcanica può essere ricondotta alla causa tettonica. Ma se per causa tettonica si intendano faglie e fratture o frane esterne od interne di strati appartenenti alla crosta superficiale solida, questa, secondo me, si deve nei casi nostri presenti escludere senz'altro. Cotali difficilissime questioni sono più sollecitamente e più recisamente definite dai profani: troppo si pretende col chiedere agli scienziati la *vera* interpretazione di tutto; ed in casi incerti val meglio rispondere: *ignoramus*.

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*. Nota II del Socio CARLO SOMIGLIANA.

Matematica. — *Sulla risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra*. Nota del Corrisp. O. TEDONE.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Su alcune rocce della Terra del Fuoco*: II, *Scisti cristallini* <sup>(1)</sup>. Nota del Corrisp. FEDERICO MILLOSEVICH.

Gli scisti cristallini sono largamente rappresentati nella collezione del dottor De Gasperi, perchè formano parte importante della costituzione geologica della regione della Terra del Fuoco da lui percorsa <sup>(2)</sup>. Fra le rocce di questo gruppo predominano per abbondanza le filladi tipiche o rocce affini; abbastanza comuni gli scisti cloritici ed i micascisti; piuttosto scarsamente rappresentati sono gli gneiss, e tutti da rocce del tipo dei paragneiss. Maggiore diffusione hanno gli scisti con anfibolo, che compaiono con rocce delle due

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Gabinetto di mineralogia del R. Istituto di studi superiori di Firenze.

<sup>(2)</sup> In altre regioni della Terra del Fuoco è stata notata la prevalenza di siffatta formazione geologica. Vedansi fra gli altri gli studi geologici di D. Lovisato nelle opere: G. Bove, *Expedicion austral argentina: informes preliminares*, Buenos Aires 1883; idem, *La spedizione antartica* in Boll. Soc. geogr. ital., 1883, pag. 5; D. Lovisato, *Una escursione geologica nella Patagonia e nella Terra del Fuoco*, ibidem, 333.

famiglie degli scisti anfibolici propriamente detti e delle anfiboliti. Alla formazione degli scisti cristallini si ricollegano delle quarziti, tutte più o meno scistose e con elementi accessori vari.

*Gneiss cornubianitico.*

Loc. Cima Sella. — Roccia poco scistosa, compatta, di color verde-chiaro.

Sebbene per l'aspetto esteriore questa roccia non si presenti come uno gneiss, ritengo di doverla ascrivere a questa famiglia, perchè mineralogicamente consta di quarzo, feldspato alcalino, feldspato calcico-sodico e mica.

Al microscopio mostra una massa costituita da un intreccio minuto di quarzo e mica in seno alla quale si trovano abbondantemente frammenti angolosi irregolari di quarzo e feldspati, ed anche, benchè più raramente, individui dei medesimi minerali con contorno cristallino distinto.

Il quarzo è per lo più in frammenti irregolari, fessurati e con estinzioni ondulose.

Il feldspato alcalino, che è il più abbondante, è ortoclasio tipico ( $\alpha'$  e  $\gamma'$  nettamente inferiori a 1.5354) <sup>(1)</sup>: è un pò torbido per incipiente caolinizzazione, ha ben distinte le tracce delle sfaldature principali e, oltrechè in frammenti, si trova anche in cristalli interi spiccatamente idiomorfi. Una caratteristica di questi grossi cristalli feldspatici è quella di essere attraversati da zone costituite dallo stesso intreccio della massa fondamentale della roccia, in modo da dare apparenze analoghe a taluni fenomeni di riasorbimento, che si osservano negli interclusi porfirici delle rocce eruttive. Qui evidentemente si tratta invece di un fenomeno di metamorfismo prodotto dalla ricristallizzazione della massa fondamentale cementante.

Il feldspato calcico-sodico, con indici  $\alpha'$  e  $\gamma'$  uguali o di poco inferiori a  $n$  della collolite e inferiori nettamente ad  $\omega$  ed  $\varepsilon$  del quarzo e con estinzioni simmetriche di 10°-12°, si può ritenere per un oligoclasio-albite. I suoi cristalli sono generalmente più piccoli, e quasi sempre a contorno netto.

Il materiale micaceo è quasi esclusivamente costituito da muscovite-sericite; magnetite, apatite e zircone sono elementi del tutto accessori.

Per la natura filladica della massa cementante i minerali suaccennati, e per lo stato frammentario di molti di essi, la roccia è indubbiamente da riferirsi ai paragneiss o gneiss sedimentarii.

*Hornfelsite.*

Loc. Isola Tres Mogotes. — Roccia compatta, di color bigio, impregnata di limonite.

Al microscopio in una massa fondamentale quarzoso-micacea come quella della roccia precedente, ma con in più parecchia clorite, presenta numerosi

<sup>(1)</sup>  $n$  della collolite = 1.5354.

granuli di quarzo e di feldspati. La differenza dalla roccia precedente è data dalla minor quantità di questi minerali e dal loro presentarsi sempre in granuli di dimensioni non grandi.

I feldspati sono anche qui ortoclasio tipico e un termine acido delle miscele oligoclasiche. La mica è ancora muscovite-sericite.

Relativamente abbondanti i minerali ferriferi, e specialmente la pirite, alterata spesso in limonite.

Ne ho fatto, non ostante le molte analogie, un tipo distinto dalla precedente, soprattutto per il suo più spiccato carattere di arenaria ricristallizzata e metamorfozzata.

*Gneiss flladico porfiroide.*

Loc. Rio dell'Ancoraggio nel Seno Pigafetta. — Roccia scistosa, di color grigio-chiaro con chiazze ellittiche rossastre.

Microscopicamente si nota una massa fondamentale formata da un aggregato allotriomorfo granulare di quarzo di grana variabile, ora più grossolana, ora più fina.

Quando la grana è fina, al quarzo sono intimamente commiste delle squame di mica sericite; quando la grana è grossa, questa manca quasi del tutto. In ogni modo la sericite unita anche a biotite forma delle concentrazioni nella massa, che anche all'esame macroscopico appaiono come chiazze ellittiche rossastre per incipiente alterazione ocrea.

Caratteristico è il modo di presentarsi, in seno a questa massa, del quarzo e dei feldspati, che hanno l'aspetto di veri e propri interclusi porfirici.

Il quarzo ha quasi sempre il contorno cristallino di una bipiramide, e mostra numerose linee di frattura.

Il feldspato alcalino, che è tipico ortoclasio, si trova in individui idiomorfi di grandi dimensioni: ha apparenza un po' torbida e alterazione parziale in caolino e muscovite. Anche in questi cristalli di ortoclasio si notano, come in quelli dello gneiss cornubianitico prima descritto, anzi in modo più spiccato, i fenomeni di attraversamento o di riassorbimento della massa fondamentale cementante nella massa del cristallo.

Il feldspato calcico-sodico ha cristalli quasi sempre non geminati, i cui caratteri ottici li fanno ritenere per albite ( $\alpha'$  e  $\gamma'$  di poco inferiori a  $n$  e nettamente inferiori a  $\omega$  ed  $\epsilon$ ).

La mica più abbondante è muscovite in lamine o in individui schelettrici; e più raramente si notano lamine di biotite con pleocroismo dal giallo-chiaro al giallo-legno, e qualche volta anche in tinte verdi per trasformazione cloritica.

Clorite poi in squamette, come pure sericite e biotite, si intrecciano con i granuli di quarzo della massa fondamentale formandovi anche quelle con-



centrazioni cui si è dianzi accennato. Abbondante è la pirite in cristalli cubici.

Le descrizioni di questa e delle rocce precedenti mostrano che fra di loro corrono parecchi punti di contatto, specialmente per la loro genesi e per la loro composizione mineralogica; le ho tenute distinte, quasi esclusivamente per peculiarità di composizione quantitativa e di struttura.

Una prova della difficoltà di una esatta classificazione e distinzione fra tali rocce si trova nella multiforme e discorde nomenclatura delle medesime secondo i vari autori.

### *Gneiss cloritico-epidotico.*

Loc. Fra L. Fagnana e L. Roca. — Roccia verde, spiccatamente scistosa.

La tessitura esterna e la struttura sono proprie degli gneiss tipici.

Il materiale lamellare più abbondante, e disposto secondo i piani di scistosità, è clorite; vi si associano in scarsa misura biotite e muscovite.

Il quarzo è in granuli o anche in grossi individui, per lo più allomorfi.

Il feldspato alcalino (ortoclasio) è assai scarso; abbonda invece il feldspato calcico-sodico in individui di dimensioni considerevoli e con elevato grado di idiomorfismo, che, dalle estinzioni simmetriche di pochi gradi e dagli indici di rifrazione uguali o di poco superiori ad  $n$ , si possono ritenere miscele oligoclasiche.

Un costituente essenziale ed abbondante è l'epidoto in cristallotti e in granuli di color giallognolo con vivi colori di interferenza e pleocroismo sensibile.

La pirite è frequente, anche in grossi cristalli nella massa della roccia.

### *Micascisti.*

Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri. — Fra gli abbondanti ciottoli di questa morena, raccolti dal De Gasperi, si trovano due varietà di micascisti un po' dissimili per l'aspetto esterno, ma non per la composizione e struttura. L'uno ha tessitura più grossolana e colore rossastro, mentre l'altro è più minuto e di color grigio.

Ambedue, al microscopio, si mostrano costituiti in prevalenza da quarzo e da mica biotite con altri minerali accessori.

Il quarzo forma aggregati granulari di grana più o meno grossa, che si adunano spesso nella roccia in lenti di dimensioni variabili ed anche in straterelli.

La mica più abbondante e caratteristica è la biotite rosso-bruna; e con essa si unisce e concreosce muscovite limpida, in minor quantità.

Elementi accessori sono clorite, magnetite, zircone, epidoto, apatite.

*Scisto cloritico.*

Loc. Inland Bay nel canale Gabriel. — Roccia verde-scuro uniforme, poco scistosa.

Al microscopio mostra un fitto aggregato squamoso di clorite (clinocloro) con poco quarzo, per lo più disposto in vene o lenti che attraversano la massa cloritica.

In mezzo alle lamine cloritiche si mostrano, come accessori, anche biotite e muscovite; ma l'elemento accessorio più interessante è un feldspato calcico-sodico, che per la sua rifrazione e per il valore degli angoli di estinzione simmetrica deve ritenersi una miscela andesinica con circa 35 % di An.

*Filladi.*

Sono le rocce più comuni della collezione, e le descrivo insieme perchè, pur con qualche differenza strutturale e di composizione quantitativa, hanno caratteri fondamentali uguali. Provengono dalle seguenti località: Rio dell'Ancoraggio nel Seno Pigafetta, Barra del Porto Sicurezza, Baia Ainsworth, Cima Sella ecc. Sono rocce nettamente scistose, lucenti, di un colore variabile, secondo i vari campioni, dal grigio-chiaro, al grigio-verdastro, al grigio-nero.

Al microscopio mostrano tutte un fitto e intimo aggregato di granuli di quarzo con squame di una mica incolore, chiara o appena verdognola, da ritenersi come sericite. Le quantità relative di questi due componenti principali sono variabili, come anche variabili sono quelle dei due accessori costanti, che sono un minerale cloritico e una sostanza carboniosa non meglio determinabile. La struttura è quella delle filladi tipiche (scisti sericitici o filliti sericitiche).

In qualche varietà si trovano nella massa filladica granuli o cristallotti di quarzo e di feldspato, i quali segnano un termine di passaggio a quei tipi di paragneiss precedentemente descritti.

Una varietà del Rio Ancoraggio nel Seno Pigafetta, per l'abbondanza di clorite, può definirsi come uno *scisto sericitico-cloritico*, mentre alcune delle Baia Ainsworth, per la copia della sostanza carboniosa, sono delle vere *filladi carboniose*.

*Quarziti.*

Loc. Sponda S-O del Seno Pigafetta, Baia..... — Rocce granulari scistose, con poco materiale lamellare bigio-verde lucente.

L'esame microscopico dimostra che si tratta di rocce affini alle precedenti, nelle quali peraltro il materiale lamellare sericitico o cloritico è in quantità assai subordinata a quella del quarzo in aggregato granulare, che

ne costituisce la parte essenziale. Per l'andamento e la disposizione in strati paralleli del materiale lamellare, queste rocce sono da ascriversi alle quarziti scistose tipiche.

### *Scisto anfibolico.*

Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri. — Roccia grigio-verde scura, a grana fina e nettamente scistosa.

Distinguo dalle anfiboliti, seguendo il Rosenbusch, questa varietà di roccia, perchè all'esame microscopico mostra assoluta assenza di feldspato. Elemento predominante è l'anfibolo (orneblenda normale) in distinti cristalli prismatici con lo schema d'assorbimento normale e sui toni  $\alpha$  verde-gialliccio chiaro,  $b$  verde,  $c$  verde-azzurrognolo. L'angolo  $c$   $c$  risulta in media di  $15^\circ$ ; notisi peraltro che qualche misura mi ha dato valori intorno ai  $25^\circ$ . Meno abbondante è il quarzo in aggregato granulare xenomorfo; rari sono magnetite, apatite e zircone.

### *Anfiboliti.*

Loc. Seno tranquillo, Fiord Negri. — In questa località si trovano tre varietà di anfiboliti di color grigio-verde, diverse fra loro per tessitura esterna più o meno granulare, tutte con scistosità poco evidente.

Le differenze sono confermate dall'esame microscopico: e ciò non deve recar meraviglia, qualora si rifletta che sono proprie di tali rocce variazioni locali di struttura e di composizione anche in un campo assai ristretto.

Gli elementi essenziali sono anfibolo e feldspato calcico-sodico; accessori in ordine di frequenza si riscontrano biotite, quarzo, clorite, epidoto, muscovite, granato, ilmenite.

L'anfibolo è quasi sempre prevalente, e si presenta, secondo i vari campioni, in elementi più grandi o più piccoli, sempre però nettamente idiomorfi. Appartiene alla comune orneblenda, con i seguenti caratteri:  $c \geq b > a$ ;  $c$  verde-grigio scuro,  $a$  verde-gialliccio;  $c$   $c = 15^\circ$  circa.

Il feldspato calcico-sodico è per lo più allotriomorfo rispetto all'anfibolo, alcuni cristalli del quale sono nettamente inclusi nel feldspato. Dove le geminazioni sono distinte, e talora anche con le due leggi albite e Carlsbad, è possibile una esatta determinazione, che porta ad una andesina basica con circa 45 % di An.

Il quarzo non frequente, e in quantità sparsa e variabile, si presenta, oltrechè in granuli, anche in imperfette sferoliti ed in taluni caratteristici aggregati mirmekitici con il feldspato.

La biotite si trova in poche lamine di dimensioni abbastanza grandi, con pleocroismo minore del normale e sulle tinte giallo-verdi per incipiente cloritizzazione.

Rara assai la muscovite.

Elemento accessorio caratteristico è il granato di color giallo-chiaro, in granuli tondeggianti piuttosto che in netti cristalli. L'epidoto è in rari granuli, quasi incolori.

Infine gli ossidi di ferro, in gran parte ilmenite, si trovano in quantità assai variabile da campione a campione.

**Fisiologia.** — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota VI: *Il fenomeno dell'addizione di due contrazioni successive indagato nel preparato diaframmatico*, del Corrispondente F. BOTTAZZI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Su di una reciprocità tra deformazioni e distorsioni.* Nota di G. COLONNETTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

In una classica serie di Memorie sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi, il prof. Volterra ha dimostrato la possibilità di creare, in essi, degli stati di equilibrio differenti dallo stato naturale, senza l'intervento di alcuna forza esterna, mediante certe operazioni a cui Egli ha dato il nome di *distorsioni* <sup>(1)</sup>.

È noto che tra i due sistemi di sforzi generati da due dati sistemi di distorsioni sussiste una reciprocità affatto analoga a quella che il Betti ha stabilita fra i due sistemi di spostamenti che derivano da due dati sistemi di forze esterne <sup>(2)</sup>.

Io mi propongo qui di dimostrare che una reciprocità esiste pure fra il sistema delle tensioni interne prodotte da una data sollecitazione esterna ed il sistema degli spostamenti che nello stesso corpo elastico vengono determinati da una data distorsione.

<sup>(1)</sup> V. Volterra, *Un teorema sulla teoria della elasticità* (Rend. R. Accademia dei Lincei, 5<sup>a</sup> serie, vol. XIV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (ibid., 5<sup>a</sup> serie, vol. XIV); *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi* (ibid., 5<sup>a</sup> serie, vol. XIV); *Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici* (ibid., 5<sup>a</sup> serie, vol. XIV); *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici* (ibid., 5<sup>a</sup> serie, vol. XIV); *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi* (ibid., 5<sup>a</sup> serie, vol. XIV); *Nuovi studi sulle distorsioni dei solidi elastici* (ibid., 5<sup>a</sup> serie, vol. XV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (Il nuovo Cimento, 5<sup>a</sup> serie, vol. X e XI); *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplément connexes* (Ann. éc. norm., 3, tom. XXIV).

<sup>(2)</sup> Cfr. ad es. V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplément connexes* (Ann. éc. norm., 3, tom. XXIV) a pag. 432 e seg.



Sia  $S$  lo spazio, connesso — in generale, anzi, a connessione multipla, — occupato da un corpo elastico in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne. Indicheremo con  $\Sigma$  la superficie, chiusa, che lo limita, e con  $\sigma$  un diaframma arbitrariamente tracciato attraverso quello spazio, cioè una superficie contenuta tutta entro  $S$ , la quale non seghi se stessa ed abbia il suo contorno su  $\Sigma$ .

Se si immagina, lungo quel diaframma, operato un taglio nel corpo elastico dato, il primitivo stato di equilibrio di questo si può conservare, dopo il taglio, immutato se si immaginano applicate alle due faccie del taglio due distribuzioni di forze, ovunque equivalenti alle tensioni interne che nel corpo dato inizialmente si trasmettevano attraverso la superficie  $\sigma$ .

Detto  $\varphi$  il potenziale elastico unitario, ed indicate con

$$X, Y, Z$$

le componenti secondo tre assi coordinati della forza esterna applicata all'elemento generico di volume  $dS$ , riferite all'unità di volume, e con

$$X_n, Y_n, Z_n$$

le analoghe componenti, riferite all'unità di area, della pressione applicata all'elemento generico di normale  $n$  delle superfici  $\Sigma$  e  $\sigma$ , le condizioni di equilibrio si riassumono notoriamente nella relazione

$$(1) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \int_S \delta \varphi \cdot dS + \int_S (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dS + \\ &+ \int_{\Sigma} (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) d\Sigma + \\ &+ \int_{\sigma} [X_n (\delta u_{\alpha} - \delta u_{\beta}) + Y_n (\delta v_{\alpha} - \delta v_{\beta}) + Z_n (\delta w_{\alpha} - \delta w_{\beta})] d\sigma \end{aligned} \right.$$

nella quale

$$\delta u, \delta v, \delta w$$

stanno a denotare le componenti, secondo gli stessi assi, dello spostamento di un punto generico di  $S$  o di  $\Sigma$  in una qualsiasi *deformazione possibile del corpo elastico* TAGLIATO;

$$\delta u_{\alpha}, \delta v_{\alpha}, \delta w_{\alpha}$$

e

$$\delta u_{\beta}, \delta v_{\beta}, \delta w_{\beta}$$

essendo i valori di

$$\delta u, \delta v, \delta w$$

relativi ad un punto generico di  $\sigma$  considerato come appartenente rispetti-

vamente all'una ovvero all'altra faccia del taglio. Più precisamente, assunta al solito come positiva la direzione della normale a  $\Sigma$  che è rivolta verso l'interno di S, si dovranno intendere contraddistinte coll'indice  $\alpha$  le componenti dello spostamento di un punto di  $\sigma$  se lo si considera come appartenente a quella faccia del taglio rispetto a cui la normale a  $\sigma$  entra in S, e coll'indice  $\beta$  quelle relative allo stesso punto considerato come appartenente all'altra faccia del taglio rispetto a cui la normale a  $\sigma$  esce da S.

Noi supporremo che il moto relativo delle due faccie del taglio sia un semplice moto rigido nello spazio: cioè che

$$\begin{aligned} \delta u_\alpha - \delta u_\beta &= l' + q'z - r'y \\ \delta v_\alpha - \delta v_\beta &= m' + r'x - p'z \\ \delta w_\alpha - \delta w_\beta &= n' + p'y - q'x. \end{aligned}$$

con  $l', m', n', p', q', r'$ , costanti.

La variazione di configurazione che il corpo elastico subisce è allora, in generale, una distorsione di Volterra, di cui

$$l', m', n', p', q', r'$$

sono le caratteristiche. Fa eccezione soltanto il caso in cui, per opera del taglio praticato secondo  $\sigma$ , lo spazio S avesse cessato di essere connesso: in questo caso il fenomeno si riduce ovviamente ad un semplice spostamento rigido di una delle due porzioni in cui il corpo è rimasto diviso rispetto all'altra.

Comunque stiano le cose, dette

$$u', v', w'$$

le componenti dello spostamento così determinato in un punto generico di S o di  $\Sigma$ , e posto, al solito,

$$\begin{aligned} x'_\sigma &= \frac{\partial u'}{\partial x} & y'_z &= \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \\ y'_y &= \frac{\partial v'}{\partial y} & z'_x &= \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \\ z'_z &= \frac{\partial w'}{\partial z} & x'_y &= \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \end{aligned}$$

la (1) si trasforma facilmente nella relazione

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & \int_S (Xu' + Yv' + Zw') dS + \int_\Sigma (X_n u' + Y_n v' + Z_n w') d\Sigma + \\ & + \int_\sigma [X_n(l' + q'z - r'y) + Y_n(m' + r'x - p'z) + Z_n(n' + p'y - q'x)] d\sigma = \\ & = - \int_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} x'_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y_\beta} y'_\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z_\gamma} z'_\gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y \right) dS \end{aligned} \right.$$

che noi scriveremo sotto la forma

$$(2') \left\{ \begin{aligned} & \int_S (Xu' + Yv' + Zw') dS + \int_{\Sigma} (X_n u' + Y_n v' + Z_n w') d\Sigma + \\ & \quad + Ll' + Mm' + Nn' + Pp' + Qq' + Rr' = \\ & = - \int_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y \right) dS \end{aligned} \right.$$

denotando, per brevità, con

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sigma} X_n d\sigma & P &= \int_{\sigma} (Z_n y - Y_n z) d\sigma \\ M &= \int_{\sigma} Y_n d\sigma & Q &= \int_{\sigma} (X_n z - Z_n x) d\sigma \\ N &= \int_{\sigma} Z_n d\sigma & R &= \int_{\sigma} (Y_n x - X_n y) d\sigma \end{aligned}$$

le sei caratteristiche del sistema di tensioni interne relative a  $\sigma$ .

Ora è facile dimostrare che il secondo membro di questa equazione è identicamente nullo.

L'asserto è evidente nel caso in cui le  $u', v', w'$  individuano un semplice moto rigido nello spazio, perchè allora si ha, in ogni punto di  $S$ ,

$$x'_x = y'_y = z'_z = y'_z = z'_x = x'_y = 0.$$

Nel caso generale, in cui si verifica la distorsione propriamente detta, si può osservare che, per l'equilibrio, deve riescire soddisfatta una equazione del tipo (1) per forze nulle così in  $S$  come su  $\Sigma$ , e per variazioni  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , affatto qualunque. Ora se tali variazioni si prendono precisamente eguali agli spostamenti  $u$ ,  $v$ ,  $w$  che nel sistema elastico dato sono prodotti dal dato sistema di forze esterne, siccome in ogni punto di  $\sigma$  riesce

$$\delta u_{\alpha} = \delta u_{\beta} \quad , \quad \delta v_{\alpha} = \delta v_{\beta} \quad . \quad \delta w_{\alpha} = \delta w_{\beta}$$

quella equazione si riduce a

$$0 = \int_S \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi'}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi'}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi'}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi'}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi'}{\partial x_y} x'_y \right) dS,$$

e poichè, per una nota proprietà delle forme quadratiche,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi'}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi'}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi'}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi'}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi'}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi'}{\partial x_y} x'_y = \\ & = \frac{\partial \varphi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y \end{aligned}$$

se ne conclude che

$$\int_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y \right) dS = 0$$

come si voleva dimostrare.

La (2') assume pertanto la forma caratteristica

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_S (Xu' + Yv' + Zw') dS + \int_{\Sigma} (X_n u' + Y_n v' + Z_n w') d\Sigma + \\ & + Ll' + Mm' + Nn' + Pp' + Qq' + Rr' = 0 \end{aligned} \right.$$

la quale esprime il teorema:

« La somma dei prodotti delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, per le corrispondenti caratteristiche di una distorsione, è eguale e contraria al lavoro che le forze esterne, applicate al corpo stesso, eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella distorsione darebbe origine ».

Se si introduce il concetto di *distorsione unitaria negativa*, chiamando così ogni distorsione le cui caratteristiche siano tutte nulle, eccezion fatta soltanto per una, a cui si attribuisce il valore fisso  $-1$ , si può enunciare il teorema sotto la forma:

« Ciascuna delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne, che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, è misurata dal lavoro che le forze esterne applicate al corpo eseguirebbero qualora su questo si operasse la corrispondente distorsione unitaria negativa ».

Così espresso, il teorema non è nuovo: chi scrive aveva già cercato di darne una dimostrazione generale in una breve Nota che ha avuto tre anni or sono l'onore di comparire in questi stessi Rendiconti <sup>(1)</sup>.

E già molti anni prima, il principio, qui espresso nella sua forma più generale era stato in qualche caso particolare intuito, ed applicato utilmente alla risoluzione di qualche problema di equilibrio iperstatico <sup>(2)</sup>.

In una prossima Nota io mi propongo di precisare la portata di queste applicazioni mettendo in evidenza in qual modo la dimostrata reciprocità fra deformazioni e distorsioni riconnetta alla teoria del Volterra alcuni fra i più importanti capitoli della scienza delle costruzioni.

<sup>(1)</sup> G. Colonnetti, *Sul principio di reciprocità* (Rend. R. Accademia dei Lincei, 5<sup>a</sup> serie, vol. XXI); cfr. anche: *Introduzione teorica ad un corso di statica dei corpi elastici* (lez. litogr., Genova 1912); *Sul principio di reciprocità* (Giorn. del genio civile, 1913).

<sup>(2)</sup> Cfr. ad es. W. Ritter, *Anwendungen der graphischen Statik*, Dritter Teil, Zürich 1900, pp. 89 e seg.



**Meccanica.** — *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente.* Nota II del dott. FRANCESCO SBRANA, presentata dal Corrisp. O. TEDONE.

6. Ci occuperemo ora brevemente delle verifiche alle quali abbiamo innanzi accennato.

Per adoperare formule non molto complicate, possiamo supporre dapprima  $f(\xi) = 0$ . Sostituendo, in questa ipotesi, nella (8), il valore di  $g(\eta)$  dato dalla (8'), troviamo l'equazione:

$$\int_0^{\eta_0} F(\xi) \left\{ I_0(\eta_0 - \xi) - I_0(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}) - \right. \\ \left. - \int_{\xi}^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}) d\eta \right\} d\xi = 0$$

nella quale  $F(\xi)$  è una funzione arbitraria. Dev'essere dunque:

$$(12) \quad \int_{\xi}^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}) d\eta = I_0(\eta_0 - \xi) - I_0(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}).$$

Allo stesso risultato si giunge quando si passa a verificare che il valore di  $\varphi(\eta)$  dato dalla (9') soddisfa alla (9).

Supponiamo ora che le (10), (10') siano scritte per  $\eta_0$  compreso tra  $l$  e  $2l$ , ritenendo sempre  $f(\xi) = 0$ . Sostituiamo, nella (10), a  $\varphi(\eta)$ , dove questa funzione compare con  $\eta < l$ , l'espressione data dalla (8'), e dove compare con  $\eta$  compreso tra  $l$  e  $2l$ , il valore dato dalla (10'). Nella identità che ne deve risultare, una parte contiene esplicitamente la sola  $F(\xi)$ , la parte rimanente contiene esplicitamente la sola  $\psi(\eta)$ . L'espressione che contiene la sola  $F(\xi)$  è la seguente:

$$- \int_0^l I_0(\eta_0 - \eta) \left\{ F(\eta) - \int_0^{\eta} F(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}) d\xi \right\} d\eta + \\ + \int_0^l F(\xi) I_0(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}) d\xi + \\ + \int_l^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) d\eta \int_0^l F(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}) d\xi,$$

e si trova subito che si annulla, quando si ritenga valida la (12). Infatti, con qualche semplice scambio di integrazioni, essa si può trasformare nell'altra:

$$\int_0^l F(\xi) \left\{ I_0(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}) - I_0(\eta_0 - \xi) + \right. \\ \left. + \int_{\xi}^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}) d\eta \right\} d\xi.$$

L'espressione che contiene esplicitamente la sola  $\psi(\eta)$  si scrive:

$$- \int_l^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) \psi(\eta - l) d\eta - \\ - l \int_l^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) d\eta \int_0^{\eta-l} \frac{I_0(\sqrt{(\xi - \eta)^2 - l^2})}{\sqrt{(\xi - \eta)^2 - l^2}} \psi(\xi) d\xi + \\ + \int_0^{\eta_0-l} I_0(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}) \psi(\eta) d\eta,$$

e, per quanto abbiamo ora dimostrato, deve per proprio conto annullarsi. Mutando, nei primi due integrali,  $\eta$  in  $\eta - l$ , e facendo nel secondo uno scambio di integrazioni, troviamo che deve sussistere l'equazione:

$$\int_0^{\eta_0-l} \psi(\eta) \left\{ I_0(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}) - I_0(\eta_0 - \eta - l) - \right. \\ \left. - l \int_{\eta}^{\eta_0-l} \frac{I_1(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2})}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}} I_0(\eta_0 - \xi - l) d\xi \right\} d\eta = 0,$$

e poichè in essa  $\psi(\eta)$  è una funzione arbitraria, deve aver luogo l'identità

$$(13) \quad l \int_{\eta}^{\eta_0-l} \frac{I_1(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2})}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}} I_0(\eta_0 - \xi - l) d\xi = \\ = I_0(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}) - I_0(\eta_0 - \eta - l).$$

Alla stessa formula si perviene, quando si fa l'analoga verifica per  $\psi(\eta)$ , essendo  $\eta$  compreso tra  $l$  e  $2l$ , e per  $\varphi(\eta)$  e  $\psi(\eta)$ , essendo  $\eta$  compreso in uno degli intervalli successivi. Se supponessimo  $F(\xi) = 0$ , otterremmo le relazioni che si hanno anche dalle (12), (13), derivando ambo i membri rapporto a  $\eta_0$ .

7. Passiamo ora a dimostrare le identità (12), (13). La identità (12) è una conseguenza immediata delle altre due:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_1(x_0 - x) I_0(x_1 - x)}{x_0 - x} dx &= I_1(x_1 - x_0) \\ \int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t} I_0(\sqrt{t^2 - r^2}) dt &= \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right) I_0(\sqrt{t_1^2 - r^2}) \end{aligned} \right.$$

dimostrate dal prof. Tedone <sup>(1)</sup>. Infatti, la seconda di queste relazioni, mutando in essa  $r$  in  $\xi$ , e  $t_1$  in  $\eta$ , si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}) = \int_{\xi}^{\eta} \frac{I_1(\eta - t)}{r - t} I_0(\sqrt{t^2 - \xi^2}) dt - \frac{\partial}{\partial \eta} I_0(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}),$$

Moltiplichiamo ambo i membri per  $I_0(\eta_0 - \eta) d\eta$ , e integriamo rapporto a  $\eta$  tra i limiti  $\xi$  e  $\eta_0$ ; tenendo conto della prima delle (14) otteniamo subito la (12).

Per dimostrare la (13), possiamo osservare che si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\eta_0 - l} \left\{ I_0(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\eta_0 - \xi - l) + \right. \\ \left. + I_0(\eta_0 - \xi - l) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}) \right\} d\xi = \\ = I_0(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}) - I_0(\eta_0 - \eta - l), \end{aligned}$$

ovvero, eseguendo le derivazioni sotto l'integrale a primo membro:

$$\begin{aligned} - \int_{\eta}^{\eta_0 - l} \left\{ I_0(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}) I_1(\eta_0 - \xi - l) + \right. \\ \left. + I_0(\eta_0 - \xi - l) \frac{I_1(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2})}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}} (\eta - \xi - l) \right\} d\xi = \\ = I_0(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}) - I_0(\eta_0 - \eta - l). \end{aligned}$$

È quindi evidente che la (13) è conseguenza dell'altra:

$$\begin{aligned} (15) \quad \int_{\eta}^{\eta_0 - l} \left\{ I_0(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}) I_1(\eta - \xi - l) + \right. \\ \left. + I_0(\eta_0 - \xi - l) \frac{I_1(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2})}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}} (\eta - \xi) \right\} d\xi = 0. \end{aligned}$$

È più agevole forse verificare quest'ultima relazione della prima, e tale verifica si conduce a termine facilmente, partendo dallo sviluppo in serie delle funzioni di Bessel che compaiono sotto l'integrale a primo membro, e seguendo la stessa dimostrazione della seconda delle (14) data dal professore Tedone.

8. Si può notare che i precedenti risultati si estendono senza difficoltà al caso in cui gli estremi della corda, invece di essere fissi, si muovano secondo leggi assegnate. Le equazioni integrali, da cui dipendono le funzioni incognite, sono della stessa forma, solo i termini noti risultano modificati; ed alla loro soluzione si può arrivare con lo stesso metodo precedente.

<sup>(1)</sup> Ved., *Sulla integrazione ecc.* questi Rendiconti, seduta 31 maggio 1913; *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate*, seduta 18 gennaio 1914.

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili*. Nota I di GAETANO SCORZA, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

Due (\*) sono i teoremi classici sugli integrali abeliani <sup>(1)</sup> riducibili a cui han condutto e nei quali si raccolgono ricerche ben note di Weierstrass, Picard e Poincaré. L'uno (che dal nome di chi gli dette la più ampia portata diremo *teorema* di Poincaré) afferma che se una varietà algebrica di irregolarità superficiale  $p$  ammette un sistema di  $q$  integrali (semplici, di 1<sup>a</sup> specie) riducibili con  $2q$  periodi ridotti, ammette anche un sistema di  $p - q$  integrali riducibili con  $2(p - q)$  periodi ridotti, i due sistemi costituendo insieme un sistema di  $p$  integrali linearmente indipendenti: l'altro stabilisce che se una varietà algebrica ammette  $\mu$  integrali ellittici linearmente dipendenti ( $\mu \geq 3$ ) ne ammette senz'altro un'infinità discontinua.

Di questo secondo teorema il Severi ha dato recentemente <sup>(2)</sup> una elegante dimostrazione geometrica e un'ampia generalizzazione, facendo ricorso al primo, a un risultato di Castelnuovo e a due sue notevoli osservazioni sul sistema congiungente e sul sistema intersezione di due sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti a una stessa varietà algebrica; quanto al primo è ormai classica la bella dimostrazione geometrica che ne dette il Castelnuovo nelle sue ricerche sugli integrali semplici delle superficie algebriche irregolari <sup>(3)</sup>.

Nel considerare le conseguenze a cui conduce il teorema di Poincaré per le funzioni abeliane a un numero qualunque di variabili semplicemente singolari, ho visto che, per far perdere ad esse un certo apparente aspetto di poca plausibilità, occorre stabilire un legame fra quel teorema e le relazioni bilineari a coefficienti interi che legano i periodi di due integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie appartenenti a una stessa varietà algebrica qualsiasi.

(\*) Avevo già spedito (16 febbraio u. s.) il manoscritto di questo lavoro al prof. Castelnuovo per la presentazione all'Accademia, quando ho saputo che il prof. Rosati stava preparando una Nota sullo stesso argomento, procedendo in un modo che presenta qualche punto di contatto col mio. La sua Nota esce contemporaneamente a questa negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino

<sup>(1)</sup> Qui adopero la frase integrali abeliani in un senso un po' più generale dell'ordinario, come risulta chiaramente dal contesto del discorso.

<sup>(2)</sup> Severi, *Sugli integrali abeliani riducibili* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIII, 1914, 1<sup>o</sup> sem. pp. 581 e 641).

<sup>(3)</sup> Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XIV, 1905, pp. 545, 593, 655), pag. 596.



Utilizzando l'idea che mi ha condotto già per via rapida e spontanea, al teorema di Humbert sulle funzioni iperellittiche singolari <sup>(4)</sup> e che, come mostrerò altrove, porta anche alla sua completa generalizzazione, mi sono imbattuto così in un procedimento che non solo fornisce con tutta chiarezza l'espressione di quel legame quanto mai intimo e semplice, ma ritrova il teorema di Poincaré e le due osservazioni del Severi per una via agevole e piana: anzi, essa potrebbe dirsi al tutto elementare se in un punto (che, per altro, è essenziale) non fosse necessario far ricorso al teorema di esistenza delle funzioni abeliane nella forma che gli detti due anni fa <sup>(5)</sup>.

Partendo da un determinato sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana della assegnata varietà algebrica di irregolarità superficiale  $p$ , rappresento omograficamente il sistema lineare dei suoi integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie sui punti di un  $S_{p-1}$  immaginario immerso in un  $S_{2p-1}$  reale; cerco di caratterizzare gli spazi rispondenti ai sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti alla varietà, e trovo che essi sono gli  $S_{q-1}$  ( $0 < q < p$ ) dell' $S_{p-1}$  per cui passano (eventualmente) degli  $S_{2q-1}$  razionali dello spazio ambiente.

Da questo punto di vista, le relazioni bilineari fra i periodi degli integrali si traducono subito in sistemi nulli razionali che hanno uno spazio unito (o totale) in quell' $S_{p-1}$  e nello spazio immaginario coniugato  $\bar{S}_{p-1}$ ; e poichè di quelle relazioni, qualunque sia la varietà considerata, ne esiste sempre almeno una, restano collegati al prescelto sistema primitivo di cicli lineari uno o infiniti sistemi nulli razionali, costituenti in ogni caso una totalità assimilabile a quella dei punti razionali di un conveniente spazio lineare (di dimensione  $\leq p^2 - 1$ ).

Tra questi sistemi nulli chiamo *principali* quelli che provengono dalle relazioni bilineari soddisfacenti alla nota disequaglianza di Riemann e dimostro, come di dovere, che questa nozione (com'è facile prevedere *a priori*) ha carattere invariante rispetto al cangiamento del sistema primitivo di cicli lineari.

Ciò posto, si vede subito che se tra quei sistemi nulli ve n'è uno singolare di specie  $2q$ , il suo  $S_{2q-1}$  singolare dà luogo per la varietà all'esistenza di un sistema regolare di  $q$  integrali riducibili con  $2q$  periodi ridotti.

L'utilizzazione di questo fatto, che poi risulta invertibile, e della corrispondenza stabilita da un sistema nullo fra gli  $S_{2q-1}$  e gli  $S_{2(p-q)-1}$  dello spazio ambiente, conduce allora, con qualche altra osservazione nuova, al teorema di Poincaré e fornisce il legame richiesto fra la presenza di sistemi

<sup>(4)</sup> Scorza, *Sulle funzioni iperellittiche singolari* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIII, 1914, 2° sem., pag. 566).

<sup>(5)</sup> Scorza, *Sul teorema di esistenza delle funzioni abeliane* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXXVI, 1913, 2° semestre).

regolari riducibili e le particolarità delle relazioni bilineari a cui soddisfano i periodi degli integrali (semplici di 1<sup>a</sup> specie) appartenenti alla varietà algebrica considerata.

Precisamente, la presenza di un sistema regolare di integrali riducibili è rivelata dall'abbassarsi della *caratteristica* di qualcuna di quelle relazioni bilineari, la caratteristica di una relazione bilineare generica essendo data sempre dal doppio dell'irregolarità della varietà.

1. Siano  $u_1, u_2, \dots, u_p$   $p$  integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie indipendenti di una varietà algebrica  $V_p$ , di irregolarità superficiale  $p$  (che, volendo, si può supporre una varietà di Jacobi o di Picard), e sia

$$(I) \quad \begin{vmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \dots & \omega_{1,2p} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \dots & \omega_{2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \dots & \omega_{p,2p} \end{vmatrix}$$

la tabella dei loro periodi corrispondenti a un determinato sistema primitivo di  $2p$  cicli lineari della riemanniana di  $V_p$ .

In uno spazio  $\Sigma$  a  $2p - 1$  dimensioni, nel quale sia fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee, diciamo  $\omega_j$  ( $j = 1, 2 \dots p$ ) il punto che ha per coordinate

$$(1) \quad \omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \dots, \omega_{j,2p},$$

e  $\bar{\omega}_j$  il punto che ha per coordinate le quantità complesse coniugate delle (1)

$$\bar{\omega}_{j,1}, \bar{\omega}_{j,2}, \dots, \bar{\omega}_{j,2p}.$$

Poi indichiamo con  $\tau$  lo spazio determinato dai punti  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$  e con  $\bar{\tau}$  quello che congiunge i punti  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_p$ .

Poichè il determinante formato con le coordinate dei punti  $\omega_j$  e  $\bar{\omega}_j$  si riduce, a meno di un fattore numerico (non nullo), a quello formato con le parti reali e i coefficienti dell'immaginario  $i$  degli elementi della (I) <sup>(6)</sup>, esso è, per un noto teorema <sup>(7)</sup>, diverso da zero e quindi i due spazi  $\tau$  e  $\bar{\tau}$  sono due  $S_{p-1}$  (immaginari coniugati) indipendenti <sup>(8)</sup>.

<sup>(6)</sup> Scorza, loc. cit. <sup>(5)</sup>, n. 4, nota <sup>(7)</sup> a pie' di pagina.

<sup>(7)</sup> Vedi per es. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionem* (Teubner, 1903), pag. 111.

<sup>(8)</sup> Dal fatto che lo spazio  $\tau$  è immaginario segue subito il lemma che Severi stabilisce nel n. 2 della sua Memoria: *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica* (Mathematische Annalen, Bd. 74, 1913, pag. 515) generalizzando una osservazione di Klein-Fricke (*Vorlesungen über die Theorie des elliptischen Modulfunktionen*, Teubner, 1892, Bd. II, pag. 540).

Ogni sistema lineare  $A$ , di dimensione  $q - 1$ , di integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie di  $V_p$  si riflette in uno spazio lineare  $\alpha$  di  $\tau$ , avente la stessa dimensione.

Diremo che  $\alpha$  è l'*immagine* di  $A$ , e lo spazio  $\alpha$  di  $\bar{\tau}$ , immaginario coniugato di  $\alpha$ , si dirà l'*immagine coniugata* di  $A$ .

2. Si osservi che lo spazio  $\tau$  fornisce coi suoi punti una rappresentazione omografica del sistema lineare  $\infty^{p-1}$  degli integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie di  $V_p$ , appena si faccia corrispondere a uno di questi integrali (determinato, naturalmente, a meno di una costante *moltiplicativa* e di una costante *additiva*) il punto di  $\tau$  che ha per coordinate i suoi  $2p$  periodi relativi al fissato sistema primitivo di cicli lineari di  $V_p$ .

La posizione di  $\tau$  (e quindi di  $\bar{\tau}$ ) in  $\Sigma$  dipende dunque non dalla scelta degli integrali  $u_1, u_2 \dots u_p$ , ma da quella del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di  $V_p$ . E, per fatti ben noti, il mutamento di quest'ultima scelta porta soltanto a cambiare  $\tau$  e  $\bar{\tau}$  con due spazi di  $\Sigma$  che possano dedursi da essi con una omografia rappresentata da una sostituzione lineare a coefficienti interi di modulo  $\pm 1$ ; cioè, come diremo, con una omografia unimodulare razionale.

3. Per quanto si tratti di cose semplici e note, rammentiamo, per la chiarezza dell'esposizione, che un  $S_k$  di  $\Sigma$  si dice *razionale* se coincide con  $\Sigma$  o, altrimenti, se i mutui rapporti delle sue coordinate, definite nel solito modo della geometria proiettiva iperspaziale, sono numeri razionali; di guisa che, in questo secondo caso, le sue coordinate si possono sempre supporre a dirittura intere.

Un  $S_k$  che contenga  $k + 1$  punti indipendenti razionali, o che appartenga a  $2p - 1 - k$  iperpiani razionali indipendenti è un  $S_k$  razionale; viceversa, un  $S_k$  razionale contiene sempre un tal gruppo di punti razionali (se  $k > 0$  ne contiene, anzi, infiniti) e sta sempre in un tal gruppo di iperpiani razionali (anzi in infiniti, se  $k < 2p - 2$ ).

Evidentemente lo spazio congiungente e lo spazio intersezione di due spazi razionali di  $\Sigma$  sono anch'essi degli spazi razionali (\*).

Un sistema nullo dello spazio  $\Sigma$ , rappresentato da un'equazione del tipo

$$\sum_{r,s}^{1, \dots, 2p} a_{r,s} y_r x_s = 0$$

(dove le  $x$  e le  $y$  sono le coordinate di due punti qualunque di  $\Sigma$  coniugati rispetto al sistema nullo, e le  $a_{r,s}$  sono gli elementi di un determinante emisimmetrico d'ordine  $2p$ ), si dirà *razionale* se i mutui rapporti

(\*) Cfr. Rosati, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXII, 1913, 2° sem., pag. 431), n. 7.

delle  $a_{r,s}$ , sono numeri razionali, cioè se le  $a_{r,s}$  si possono supporre numeri interi.

Lo spazio polare di un  $S_h$  razionale rispetto a un sistema nullo razionale è, evidentemente, razionale; e un sistema nullo razionale di  $\Sigma$ , che sia singolare di specie  $h$  (dove  $h$  è necessariamente pari, una volta che  $\Sigma$  ha dimensione dispari) <sup>(10)</sup>, avrà, naturalmente, per spazio singolare (o *centro*, o *asse*) un  $S_{h-1}$  razionale.

Infine un sistema nullo di un  $S_h$  razionale di  $\Sigma$  si dirà razionale se si può concepire come indotto in  $S_h$  da un sistema nullo razionale di  $\Sigma$ .

4. Se i punti di un  $S_h$  di  $\Sigma$  sono a due a due coniugati rispetto a un determinato sistema nullo di  $\Sigma$ , cioè, se il complesso lineare, che il sistema nullo definisce, contiene tutte le rette di  $S_h$ , diremo col Kantor <sup>(11)</sup>, che il sistema nullo o il relativo complesso lineare ha in  $S_h$  uno *spazio totale*.

Ricordiamo, a questo proposito, che se un sistema nullo (o complesso lineare) di  $\Sigma$  ha per centro o asse un  $S_{2l-1}$ , i suoi spazi totali sono tutti e soli quelli contenuti negli spazi totali di dimensione massima. Questi ultimi sono della dimensione  $p + l - 1$  e ognuno di essi passa per il centro del sistema nullo (o complesso lineare) considerato <sup>(12)</sup>.

5. Ciò premesso, dimostriamo che :

*Se la varietà  $V_p$  ammette un sistema  $A$ ,  $\infty^{q-1}$ , di integrali riducibili con  $2q$  periodi ridotti, l' $S_{2q-1}$  congiungente le immagini  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  di  $A$  è uno spazio razionale.*

E infatti se, per fissar le idee,  $q$  integrali indipendenti del sistema  $A$  sono appunto gli integrali  $u_1, u_2, \dots, u_q$ , indicando con  $\Omega_{j,k}$  ( $k = 1, 2, \dots, 2q$ ) i periodi ridotti dell'integrale  $u_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ), esistono, per definizione, dei numeri interi  $h_{l,k}$  ( $l = 1, 2, \dots, 2p; k = 1, 2, \dots, 2q$ ) per cui si ha :

$$(2) \quad \omega_{j,l} = \sum_{k=1}^{k=2q} h_{l,k} \Omega_{j,k} \quad (j = 1, 2, \dots, q; l = 1, 2, \dots, 2p).$$

Ma allora sarà pure, indicando con  $\bar{\Omega}_{j,k}$  la quantità complessa coniugata di  $\Omega_{j,k}$ ,

$$(3) \quad \bar{\omega}_{j,l} = \sum_{k=1}^{k=2q} h_{l,k} \bar{\Omega}_{j,k} \quad (j = 1, 2, \dots, q; l = 1, 2, \dots, 2p).$$

<sup>(10)</sup> Vedi per es. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1902), pag. 105.

<sup>(11)</sup> Kantor, *Theorie der linearen Strahlencomplexe im Raume von  $r$  Dimensionen* (Crelle's Journal, vol. 118, an. 1897).

<sup>(12)</sup> Palatini, *Sui complessi lineari di rette negli iperspazi* (Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLI, 1903), n. 2.



Or si considerino in  $\Sigma$  i  $2q$  punti razionali aventi per coordinate gli elementi delle singole righe della matrice

$$(4) \quad \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \dots & h_{2p,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \dots & h_{2p,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,2q} & h_{2,2q} & \dots & h_{2p,2q} \end{vmatrix};$$

in virtù delle (2) e (3) lo spazio che li congiunge contiene i punti  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_q$ , quindi esso coincide con l' $S_{2q-1}$  congiungente gli spazi  $\alpha$  ed  $\bar{\alpha}$ , e questo è, come volevasi, uno spazio razionale.

OSSERVAZIONE. — Il ragionamento fatto esclude evidentemente che la caratteristica della matrice (4) possa essere inferiore a  $2q$  e quindi esclude, in particolare, che gli elementi di una sua riga possano essere tutti nulli.

Ciò dimostra, incidentalmente, il teorema ben noto che un sistema lineare completo di integrali riducibili non può avere dimensione superiore alla metà del numero dei periodi ridotti, diminuito di 2 <sup>(13)</sup>.

Col Severi <sup>(14)</sup>, un sistema come il sistema A del teorema precedente si dirà un *sistema regolare* di integrali riducibili.

6. Il ragionamento del numero precedente è senz'altro invertibile, e quindi:

*Se esiste in  $\Sigma$  un  $S_{2q-1}$  razionale ( $q < p$ ) appoggiato a  $\tau$  secondo un  $S_{q-1}$   $\alpha$  (e quindi anche a  $\bar{\tau}$  secondo l' $S_{q-1}$   $\bar{\alpha}$  immaginario coniugato di  $\alpha$ ),  $\alpha$  è l'immagine di un sistema regolare  $\omega^{q-1}$  di integrali riducibili di  $V_p$ .*

Per brevità di discorso, l' $S_{2q-1}$  razionale che in virtù delle osservazioni fatte vien collegato biunivocamente a un sistema regolare A di integrali riducibili di  $V_p$  si dirà l'asse di A e si indicherà con  $A_1$ .

7. Se L ed M sono, rispettivamente, il sistema lineare intersezione e il sistema lineare congiungente di due sistemi regolari A e B di integrali riducibili di  $V_p$ , le immagini  $\lambda$  e  $\mu$  di L ed M sono, rispettivamente, lo spazio intersezione e lo spazio congiungente delle immagini  $\alpha$  e  $\beta$  di A e B; inoltre, attesa l'indipendenza di  $\tau$  e  $\bar{\tau}$ , è chiaro che lo spazio intersezione e lo spazio congiungente degli assi  $A_1$  e  $B_1$  di A e B sono, rispettivamente, gli spazi congiungenti  $\lambda$  e  $\mu$  con i loro spazi immaginari coniugati  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$ .

Ma poichè A e B son razionali, tali son pure lo spazio secondo cui si intersecano e quello a cui appartengono, dunque:

<sup>(13)</sup> Castelnuovo Enriques, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Annales scientifiques de l'École normale supérieure, tom. XXII, 1906, pag. 339), n. 1; Severi, *Lezioni di Geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), pag. 338.

<sup>(14)</sup> Severi, loc. cit.<sup>2)</sup>, pag. 582.

*Il sistema intersezione e il sistema congiungente di due sistemi regolari di integrali riducibili di  $V_p$  sono anch'essi dei sistemi regolari <sup>(15)</sup>. e i loro assi sono, ordinatamente, lo spazio intersezione e lo spazio congiungente degli assi dei due sistemi dati.*

Di qua segue che:

*Due sistemi regolari distinti di integrali riducibili di  $V_p$  sono certo indipendenti se nessuno dei due contiene un sistema regolare di dimensione inferiore alla propria.*

**Meccanica.** — *Resistenza effettiva e resistenza ohmica.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

**Matematica.** — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni integro-differenziali.* Nota di N. ZEILON, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Un indotto per correnti continue, senza collettore nè contatti striscianti, fondato sulle azioni elettromagnetiche di seconda specie.* Nota di O. M. CORBINO o G. C. TRABACCHI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. In alcuni lavori antecedenti <sup>(1)</sup>, uno di noi ha illustrato una serie di fenomeni anormali che si manifestano quando la corrente elettrica traversa i conduttori metallici sottoposti all'azione di un campo magnetico. Mentre negli effetti comuni delle correnti le due specie di ioni, che trasportano l'elettricità positiva e negativa nei due sensi opposti, esercitano azioni che si sommano, in modo inseparabile, nel totale effetto osservato, la presenza di un campo magnetico, il quale agisce deviando in diversa misura le due correnti ioniche fluenti con diversa velocità, dà origine ad altri fenomeni di tipo differenziale, dei quali era noto fino allora l'effetto Hall.

Si designa sotto questo nome quel fenomeno pel quale in una lamina metallica, sotto l'azione del campo magnetico, le linee di corrente restano, in certe condizioni, inalterate, ma ruotano rispetto ad esse le antiche linee equipotenziali.

<sup>(15)</sup> Severi, loc. cit.<sup>21</sup>, pp. 584 e 585.

<sup>(1)</sup> O. M. Corbino, *Azioni elettromagnetiche dovute agli ioni dei metalli*, N. Cim., vol. I, giugno 1911.

È stato dimostrato <sup>(1)</sup> che nel caso più generale si modificano insieme le linee di corrente e le linee equipotenziali, in tal modo che in tutta la lamina esse si incontrano sotto un angolo  $\frac{\pi}{2} - \beta$  costante, caratteristico del metallo, e crescente con l'intensità del campo. Mentre la deviazione delle linee equipotenziali, che costituisce l'effetto Hall, può mettersi in evidenza col metodo delle sonde rilegate al galvanometro, la distorsione delle linee di corrente è meno semplice a constatare, ma dà luogo ad alcuni fenomeni elettromagnetici singolari, che il Corbino chiamò « di seconda specie ». Il caso estremo della semplice deviazione delle linee equipotenziali si può realizzare, come dimostrò il prof. Volterra <sup>(2)</sup>, applicando elettrodi puntiformi al contorno della lamina. L'altro caso estremo si realizza con le lamine a connessioni multiple, aventi i contorni come elettrodi: per esempio con un disco circolare avente un elettrodo al centro e uno alla periferia; restano allora del tutto invariate le linee equipotenziali primitive, mentre vengono distorte le linee di flusso.

Cessa pertanto l'effetto Hall, mentre si accentuano gli effetti elettromagnetici, che furono studiati appunto in queste condizioni dal Corbino per il bismuto e l'antimonio, e, più recentemente, da Adams e Chapman <sup>(3)</sup> per questi ed altri dodici metalli. Nei riguardi dei due fenomeni i diversi metalli presentano caratteristiche non del tutto corrispondenti. Invero, per l'effetto Hall si constata enormi differenze da metallo a metallo, e gli effetti dipendono dallo spessore della lamina; invece l'altro è indipendente dallo spessore, e le differenze da metallo a metallo sono di molto attenuate. Così l'effetto Hall varia da 1 a 2,000,000 in una serie di elementi che comincia col platino e finisce col tellurio; l'altro effetto varia solo da 1 a 150, cominciando dal cobalto e terminando col bismuto.

Il carattere anormale di questi fenomeni elettromagnetici si rivela subito dalle qualità che assume un disco percorso da correnti radiali, il quale per effetto del campo si trasforma in una lamina magnetica a correnti circolari; e più specialmente dal fatto che le forze elettromagnetiche che ne risultano, fra il disco e il campo, e le f. e. m. induttive radiali destinate allo stabilire del campo, sono indipendenti dal senso di questo, contrariamente a ciò che avviene per le azioni di Ampère e per l'induzione di Faraday.

Ma altri effetti, non meno singolari, possono ottenersi, dando al metallo altre forme, come ci proponiamo di esporre in questa Nota. Siamo infatti

<sup>(1)</sup> O. M. Corbino, *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sotto l'azione di un campo*, Rend. Linc., vol. XXIV, pag. 213, an. 1915.

<sup>(2)</sup> V. Volterra, *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico*. Rendic. Linc., vol. XXIV, pag. 220, an. 1915.

<sup>(3)</sup> E. P. Adams e A. Chapman, *The Corbino Effect*. Phil. Mag., vol. 28°, pag. 692, an. 1915

riusciti a costruire, con due telai ortogonali di nastro metallico, un modello di indotto il quale presenta la seguente curiosa proprietà:

*Esso, sottoposto all'azione di un campo e percorso da una corrente continua attraverso a due punti fissi, senza contatti striscianti, si comporta come un indotto munito di collettore Pacinotti e di spazzole, costantemente orientate a 90° dal campo esterno, comunque ruotino il campo o l'indotto.*

In conseguenza di questa proprietà, si possono realizzare le seguenti disposizioni:

1°) inviando una corrente continua per i due contatti fissi, che possono essere costituiti dai due punti di appoggio dell'albero, l'indotto ruota uniformemente in un campo fisso, con una coppia costante, proporzionale al quadrato del campo;

2°) muovendo l'indotto con velocità costante nel campo, si sviluppa una forza elettromotrice continua e costante fra le punte dell'albero, senza contatti striscianti;

3°) disponendolo in un campo rotante Ferraris, e tenendolo fermo, si ottiene fra gli stessi due punti fissi dell'albero una f. e. m. continua e costante.

Si vede, perciò, che l'apparecchio permette, utilizzando queste azioni elettromagnetiche anormali, di sottrarsi alla finora inviolata validità del principio teorico, per il quale *non si possono ottenere rotazioni elettromagnetiche permanenti con correnti continue, nè forze elettromotrici costanti per virtù di movimento o di induzione su organi fissi, senza ricorrere a contatti striscianti (su cerchi di raggio diverso da zero), ovvero a resistenze periodicamente variabili (raddrizzatori elettrolitici ecc.)* <sup>(1)</sup>.

Crediamo opportuno di aggiungere che l'apparecchio, da noi costruito, mentre gode effettivamente le proprietà sovra indicate, non ha alcuna pretesa di utilizzazione industriale: e ciò, sia per la piccola entità degli effetti osservati, sia per le pessime condizioni di rendimento. Agiscono, ad accentuare queste ultime, le rilevanti perdite per correnti di Foucault, che sono però ineliminabili; poichè tutto ciò che gioverebbe a diminuirle attenua in egual misura l'effetto utile.

Questo risulta, come si è detto, proporzionale al quadrato del campo dello statore: e così l'indotto, funzionando da motore, *non inverte il suo movimento all'invertire del campo*; esso ruoterebbe con un senso costante anche in un campo alternativo, e anche in questo, se girato per forza meccanica, genererebbe una forza elettromotrice pulsante, ma sempre di un senso.

<sup>(1)</sup> Sulla necessità dei contatti striscianti anche nella induzione unipolare, si veda H. Poincaré, *L'Eclair. électr.* tom. XXIII, p. 41; 1900. Vi si troverà la distinzione essenziale fra veri contatti striscianti, e contatti puntiformi, i quali ultimi non consentono il moto con correnti continue o lo sviluppo di f. e. m. costanti.



Infine, l'effetto utile è sensibilmente proporzionale al coefficiente caratteristico degli effetti elettromagnetici di seconda specie, per il metallo adoperato, quale risulta dalle misure di Corbino e di Adams.

2. Un telaio rettangolare (fig. 1) ha i lati anch'essi rettangolari e costituiti dalle lastre sottili  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ . La prima, tratteggiata nella figura, è di bismuto; le altre sono di rame. Due fili di rame sono saldati nei punti di mezzo M e N della lastra di bismuto; e per essi può essere mandata una corrente continua I.

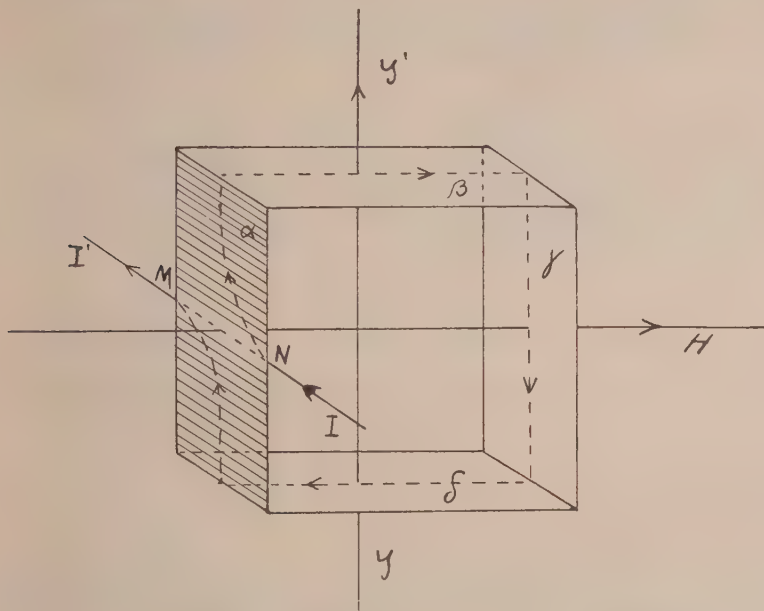


FIG. 1.

Si supponga il telaio disposto nel campo magnetico  $H$  normale alla lastrina di bismuto. Allora la corrente che giunge in  $N$  sarà *parzialmente* distorta dal campo, e una parte circolerà nel telaio, trasformandolo in una lamina magnetica che tenderà a ruotare nel campo, intorno all'asse  $Y Y'$ .

Durante la rotazione il telaio, visto dall'alto, prenderà l'aspetto della fig. 2, dove la lamina si proietta in  $M N$ . Se si indica con  $\vartheta$  l'angolo formato dalla normale al telaio col campo in una fase del giro, a produrre la corrente distorta nel telaio sarà attiva solo la componente  $H \sin \vartheta$  del campo, e perciò la corrente distorta  $i$  sarà proporzionale ad  $H \sin \vartheta$  e alla corrente principale  $I$ : avremo dunque

$$i = KHI \sin \vartheta,$$

dove  $K$  è una costante. Il telaio avrà un'energia di posizione nel campo. essa varierà di  $dW$  per una ulteriore rotazione  $d\vartheta$ , e avremo

$$\frac{dW}{d\vartheta} d\vartheta = i dN,$$

dove  $dN$  indica la variazione del flusso di forza attraverso la superficie  $S$  del telaio in conseguenza del moto. Avremo perciò

$$\frac{dW}{d\vartheta} = i \frac{dN}{d\vartheta} = i \frac{d(SH \cos \vartheta)}{d\vartheta} = -iSH \sin \vartheta.$$

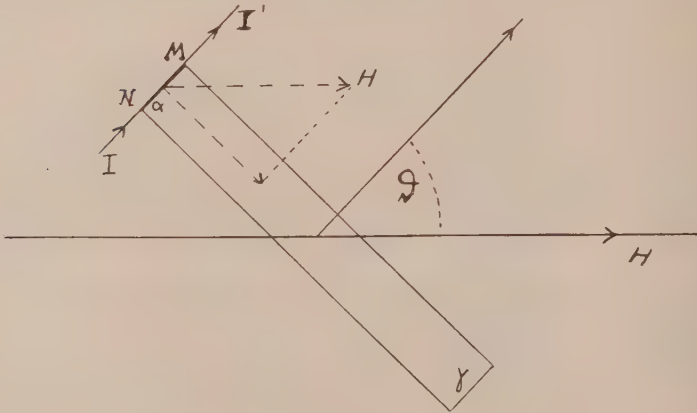


FIG. 2.

Ma  $\frac{dW}{d\vartheta}$  misura la coppia  $C_1$  agente sul telaio; avremo perciò, in valore assoluto,

$$C_1 = iSH \sin \vartheta = KSIH^2 \sin^2 \vartheta.$$

Così, per un giro intero,  $C_1$  ha un valore medio diverso da zero.

Se un secondo telaio identico è disposto a  $90^\circ$  dal primo, avremo una seconda coppia

$$C_2 = KSIH_2 \cos^2 \vartheta,$$

e perciò la coppia totale agente sul sistema rigido dei due telai sarà

$$C = KSIH^2.$$

Questa è costante per qualunque valore di  $\vartheta$ , così come avverrebbe di un indotto munito di un collettore di Pacinotti ideale, cioè con un numero

infinito di lamine, e nel quale le spazzole restassero *invariabilmente connesse* col campo, a  $90^\circ$  da questo, comunque ruotino il campo o l'indotto.

Per valutare  $K$ , si consideri la (1) per  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ; cioè nella posizione della fig. 1. Si avrà

$$i = KIH.$$

La costante  $K$  può determinarsi con una esperienza diretta, misurando l'azione induttiva del telaio su una bobina all'invio della corrente  $I$ ; ma può anche prevedersi con un calcolo approssimativo, di cui diamo il risultato.

Se si indica con  $E$  la costante del metallo introdotta dal Corbino col nome di « momento ionico differenziale » <sup>(1)</sup>, con  $a$  ed  $l$  la larghezza e la lunghezza della lamina, e si trascura la resistenza della parte in rame del telaio di fronte a quella della lastrina di bismuto, sarà approssimativamente

$$K = E \frac{a}{l}.$$

Sostituendo nella espressione della coppia otteniamo così

$$C = ES \frac{a}{l} IH^2.$$

Adunque la coppia non si inverte col campo, è proporzionale alla intensità della corrente principale  $I$  e alla costante  $E$  del metallo, e non dipende dallo spessore della lastrina. Ricorderemo che nel bismuto si ha, all'incirca,  $E = 5 \cdot 10^{-5}$  in unità elettromagnetiche. Col bismuto si otterranno effetti più cospicui; ma risultati qualitativamente identici si avrebbero con telai omogenei di qualunque metallo.

La fig. 3 rappresenta i due telai incrociati, con le lastrine di bismuto  $NM$ ,  $N'M'$ . Essi devono essere isolati l'uno dall'altro nel montarli sul medesimo asse. Le connessioni elettriche son fatte dai fili  $AN$ ,  $MN'$ ,  $M'B$ , di cui gli estremi  $A$  e  $B$  son saldati alle due metà superiore e inferiore dell'albero, isolate fra loro, e quindi, attraverso alle punte di sostegno, possono essere rilegati alla sorgente. Occorre che il circuito principale  $ANMN'M'B$

(<sup>1</sup>) Si trova facilmente che la costante  $E$  è legata all'angolo  $\beta$  (di cui sono mutuamente ruotate, in ogni punto di una lamina metallica, la normale alla linea di flusso e la linea equipotenziale), dalla relazione

$$\text{tang } \beta = EH.$$

non presenti aree perforabili dalle linee di forza del campo, e ciò allo scopo di evitare le azioni perturbatrici di tipo amperiano.

Lo stesso apparecchio permette di ottenere fra gli estremi A e B una f. e. m. costante, qualora sia ruotato uniformemente nel campo; essa è data, come è facile di riconoscere applicando il principio dell'energia, da

$$\varepsilon = \frac{C\omega}{I} = ES \frac{a}{l} H^2 \omega ,$$

dove  $\omega$  indica la velocità angolare.

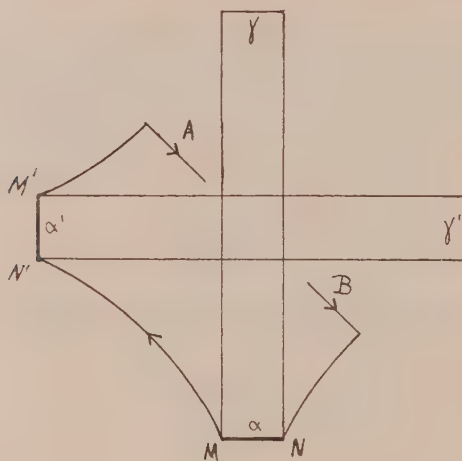


FIG. 3.

E infine una f. e. m. eguale si ottiene se l'apparecchio fisso è immerso in un campo Ferraris, ruotante con velocità  $\omega$ , come in un indotto Pacinotti di cui le spazzole siano trascinate, in moto sincrono, a  $90^\circ$  dal campo rotante.

Sui dettagli costruttivi e sui particolari delle esperienze, che sono conformi alle previsioni, riferiremo in una prossima Nota.



Fisica. — *Arco e scintilla*. Nota di A. OCCHIALINI in risposta al prof. LA ROSA. Presentata dal Corrisp. A. BATTELLI.

In un lavoro pubblicato nel « Nuovo Cimento » sotto lo stesso titolo di questa Nota <sup>(1)</sup>, ho cercato di stabilire i criteri per distinguere il fenomeno della scintilla da qualunque altra forma di conduzione stazionaria, ed in particolare dall'arco. Precisamente concludevo che la fase finale della scintilla di scarica di un condensatore è un arco, perchè appunto di questa forma di conduzione esige la condizione caratteristica per esistere, cioè il catodo rovente. Inoltre richiama-vo, che i miei precedenti lavori avevano dimostrato che la fase con la quale un arco si inizia, è una scarica transitoria che offre tutte le apparenze della fase iniziale della scintilla, ossia della così detta pilota; ed aggiungevo altri fatti a sostegno della mia tesi. Osservavo che questa era in contrasto con quanto il La Rosa aveva scritto in una sua Memoria, dove, pur non trattandosi esplicitamente delle relazioni fra l'arco e la scintilla, si veniva ad affermare che, alla scarica iniziale di un arco non poteva darsi il nome di scintilla, perchè il campo elettrico necessario per produrla non era elevato quanto quello delle comuni scintille. E portavo le ragioni per le quali, secondo me, la distinzione del La Rosa doveva ritenersi non conforme ai fatti suggeriti dall'analisi del fenomeno.

Il prof. La Rosa risponde ora in una Nota pubblicata in questi rendiconti <sup>(2)</sup>; ma, lasciando quasi completamente da parte la questione per la quale egli era stato chiamato in causa, fa una critica alle mie esperienze e alla loro interpretazione. Questa critica parte sempre da inesatta comprensione di ciò che ho scritto, forse per effetto di una troppo concisa esposizione da parte mia e dell'omissione di particolari sperimentali che mi riservavo di riportare per intero in una pubblicazione che, secondo i miei desiderii, avrebbe dovuto succedere immediatamente alla prima comunicazione e che ho dovuto ritardare per ragioni indipendenti dalla mia volontà. Comunque, sono in grado di confermare integralmente i fatti esposti nella mia Nota e di sostenere immutate le interpretazioni che di questi fatti ho dato.

Cominciamo col precisare bene i fatti. Al La Rosa la mia esperienza sulle scintille troncate non appare dimostrativa, perchè non sa se si sia tenuto il debito conto « dell'alterazione inevitabile della resistenza complessiva del circuito elettrico, dovuta alla sostituzione dell'elettrodo liquido a quello metallico; sostituzione, che, facendo crescere lo smorzamento, può dar luogo a tutte o a parte delle modificazioni che sono state attribuite alla

<sup>(1)</sup> Nuovo Cimento 7, 365, 1914.

<sup>(2)</sup> Rend. Acc. Lincei 24, 234, 1915.

presenza dell'elettrodo non arroventabile ». Forse se il Prof. La Rosa avesse notato la circostanza chiaramente espressa, che le scintille con elettrodo liquido si presentano *assai più violente e rumorose delle altre*, si sarebbe persuaso che lo smorzamento non poteva attribuirsi del tutto alla resistenza, e la mia conclusione, che da un certo momento la scarica di un condensatore esige gli elettrodi roventi, non gli sarebbe apparsa dubbia. Certo la stessa conclusione sarebbe stata più evidente se non avessi taciuto il fatto, da me ripetutamente constatato, che il numero delle oscillazioni che si ottengono con l'elettrolito è lo stesso, tanto se questo ha uno spessore di 4 o 5 centimetri, quanto se lo spessore è ridotto a 2 mm. Anche un foglio di carta da filtro bagnato con la soluzione e disteso sopra una lastra metallica dà lo stesso numero di mezze oscillazioni.

Ma, soprattutto, l'alterazione della resistenza del circuito, dovuta alla sostituzione dell'elettrodo liquido con quello metallico, è tutt'altro che inevitabile; ed io l'ho evitata in diversi modi. Basti qui citarne uno: si ponga l'elettrolito in un recipiente metallico abbastanza largo e profondo 4 o 5 cm., e nel centro, portato da una bacchetta di vetro, si ponga un dischetto di metallo di pochi millimetri di diametro che possa emergere appena dal liquido o possa restare immerso per un paio di mm. al di sotto della superficie dell'elettrolito. Allora la scintilla potrà scoccare fra un elettrodo sovrastante al recipiente e il dischetto, oppure fra l'elettrodo e l'elettrolito, senza che la resistenza del circuito sia sensibilmente alterata.

Ebbene, operando così, si ottiene sempre ciò che ho riferito nel mio lavoro: il numero delle oscillazioni della scintilla sull'elettrolito risulta  $\frac{1}{4}$  o  $\frac{1}{5}$  del numero che si osserva fra elettrodi metallici. Che se poi si volesse conoscere l'influenza che la resistenza dell'elettrolito può avere nelle circostanze più sfavorevoli delle mie esperienze, comunicherò che con le soluzioni da me adoperate in un recipiente metallico di 10 cm. di diametro e di 5 cm. di profondità ho notato fra metalli (dischetto emergente) 28 mezze oscillazioni, mentre sopprimendo la resistenza liquida ne ho osservate 33. Tenendo conto che con l'elettrodo elettrolitico se ne vede sempre 7, si conclude che se l'effetto smorzante della resistenza elettrolitica nel caso più sfavorevole è del 15 %, quello dell'inarroventabilità dell'elettrodo è del 75 %.

Il La Rosa ferma poi la sua attenzione sulle circostanze in cui si presentano le righe di scintilla nell'arco; e nel ricordare che io già una volta riferii che l'arco tra carboni emette nella fase iniziale uno spettro di righe, dice che allora dubitò che io facessi confusione fra questo spettro di righe e lo spettro di scintilla del carbonio. Per dimostrare quanto fosse infondato il suo dubbio, riferirò che nel lavoro al quale allude il La Rosa c'è il seguente passo..... « Certo le righe della scintilla non appaiono nell'arco iniziale e di ciò mi sono accertato osservando lo spettro di una

scintilla scoccata fra carboni, della quale un'immagine ottenuta con un obbiettivo era portata nel punto in cui un'arco si adescava. (Nuovo Cimento 19, 314, 1910).

Riguardo poi alla presenza di righe di scintilla in un arco interrotto mediante soffiamento magnetico, senza l'impiego di condensatori, il La Rosa crede che questo fatto sia in contradizione con altri da lui osservati. Ma io ricorderò che nella stessa sua Memoria è citata e ammessa la comparsa di righe di scintilla in circostanze quasi identiche alle mie, cioè in un arco interrotto con un soffio d'aria.

Precisamente è il Crew che fatto questa osservazione nel 1904 constatando nelle circostanze suddette l'apparizione della riga di scintilla del magnesio ( $\lambda$  4481) in un arco fra elettrodi di magnesio. È vero che nel mio lavoro non ho indicato che l'elettrodo sul quale si imposta l'arco soffiato era precisamente di magnesio, come ho taciuto delle precauzioni necessarie per mantenere l'elettrodo freddo, ma il fatto mi pareva così noto da non doverci insistere più che tanto.

Il La Rosa, tentando di ripetere questa esperienza, non sapendo che elettrodi io avessi adoperato, si crede « autorizzato di ritenervi di carbone ». Veramente non so come potesse prendersi questa autorizzazione, tanto più che nello stesso mio lavoro tutte le altre osservazioni spettroscopiche sono fatte sul magnesio.

Eppure che il carbone fosse proprio da escludere si doveva dedurre dal fatto che le righe di alta eccitazione compariscono soltanto finchè l'elettrodo non è diventato caldo; ora il carbone si riscalda con eccessiva facilità.

Questo vide benissimo il Ludewig che scrisse:..... « all'Occhialini non è riuscito col suo dispositivo (quello delle scintille a basso potenziale) di ottenere anche con carbone uno spettro di scintilla. *Questo comparve immediatamente nella ripetizione delle sue esperienze raffreddando bene l'elettrodo laterale* » (Ann. d. Phys. 42, 661, 1913).

Il Ludewig stesso, del resto, con una modificazione del mio dispositivo (modifizierte Occhialini-Schaltung) e con uno speciale raffreddamento dell'elettrodo ottenne la trasformazione dello spettro del carbonio mediante un arco interrotto senza l'impiego di condensatori (Id. pag. 658, fig. 22).

Infine il La Rosa fa un rilievo sopra una mia interpretazione dei risultati dell'analisi spettrale. Secondo il La Rosa stando alle idee da me propugnate, i due spettri ottenuti lasciando inalterate le condizioni del circuito e sostituendo l'elettrodo liquido a quello metallico, dovrebbero semplicemente differire per gli elementi spettrali caratteristici della seconda fase della scarica, cioè di quella che si identifica con un arco, e che viene soppressa dalla sostituzione dell'elettrodo; eppure, prosegue sempre il La Rosa, la semplice ispezione degli spettrogrammi riprodotti mostra che nello spettro della scin-

tilla troncata mancano proprio gli elementi spettrali che, secondo le esperienze di Battelli e Magri, dovrebbero essere emessi dalla pilota e dalle primissime oscillazioni.

Vediamo bene questo punto. Nel mio lavoro sono riportate tre coppie di spettrogrammi riferibili a scintille ordinarie e a scintille troncate in tre diverse condizioni di circuito: piccola, media e grande autoinduzione.

Il La Rosa non dice che l'unico spettrogramma in cui manca ciò che viene emesso dalla pilota e dalle prime oscillazioni è quello ottenuto con grande autoinduzione. Ora proprio nella Memoria di Battelli e Magri è mostrato che con alta auto-induzione spariscono dalla scintilla le righe d'alta eccitazione. Questo è il fatto spettroscopico. Io osservo che nello stesso tempo che l'alta eccitazione si affievolisce fino a sparire, si affievolisce anche la pilota fino a sparire, o meglio fino a diventar così debole e sottile che sulla lastra riprodotta nella fig. 3 o nella tavola alla fig. VII del mio lavoro non si riesce alla prima a vedere.

Dunque quel processo che è costituito dalla pilota e che si ripete nelle primissime oscillazioni può essere invisibile, e in tal caso lo spettro della scintilla è tutto d'arco. Allora, se in queste condizioni la scintilla è troncata sopprimendo l'unica cosa che c'era rimasta, ossia l'arco, come potremo aspettarci che comparisca ancora lo spettro della pilota? Infatti non compare e ciò che si vede è il povero spettro della scarica a bagliore, quella che si può stabilire con una tensione di 400 volta circa fra un anodo metallico e un catodo elettrolitico.

Maggior concordanza fra il lavoro di Battelli e Magri e il mio non potrebbe essere desiderata.

Il sostanziale della discussione, cioè la possibilità di trovar criterî netti per distinguere l'arco dalla scintilla, è dal La Rosa ridotto alla timida affermazione che allo stato attuale delle nostre conoscenze si possa ancora sostenere la teoria da me combattuta, e all'osservazione che non mancano fatti che potrebbero mettere in imbarazzo la tesi da me sostenuta. Questi fatti mi sarei aspettato di conoscere, pronto eventualmente a rinunciare alle mie vedute davanti alla loro evidenza. Per altro se questi fatti si riducono tutti, come afferma il La Rosa, all'esistenza di diversi tipi di arco, è molto dubbio che essi riescano a mettere in serio imbarazzo un'argomentazione che non distingue fra scariche stazionarie, siano esse archi di vari tipi o anche scariche a bagliore.



Fisica terrestre. — *Velocità di propagazione del terremoto Marsicano del 13 gennaio 1915.* Nota di G. AGAMENNONE, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. Scopo d'una mia Nota precedente <sup>(1)</sup> fu quello di far subito conoscere le ore esatte in cui questo disastrosissimo terremoto cominciò a perturbare i sismografi di M. Cassino, Rocca di Papa e Roma, i più vicini alla regione colpita, e di trarne qualche conclusione circa la posizione dell'epicentro. Oltre a ciò, riportai le ore di vari altri osservatorii italiani, e di alcuni anche esteri, e volli anche tentare un primo calcolo sulla velocità di propagazione delle onde sismiche, le più veloci. Infine, accennai allo straordinario numero di repliche (quasi 750) registrate all'Osservatorio di Rocca di Papa sino a tutto il 6 febbraio <sup>(2)</sup>.

Ora che m'è pervenuta la risposta di vari altri osservatorii, ritengo utile un nuovo tentativo di calcolo della velocità di propagazione, il cui valore riuscirà più sicuro, anzitutto perchè basato sopra un maggior numero di dati, e poi anche perchè deve essere arrecata una correzione alle ore di Roma e di Granata, quali furono pubblicate nella mia precedente Nota. Infatti, dopo un più attento esame al sismogramma di Roma, si riconobbe un lieve errore nella misura della *parallasse*, causato dall'inesattezza della squadra adoperata; errore che risultò di 2 secondi in più, sicchè l'ora precisa è  $7^h 52^m 53^s$  invece di  $7^h 52^m 55^s$ . Questa differenza, già di per sè così piccola, si fa ancor meno sentire nella media dei dati orari di M. Cassino, Rocca di Papa e Roma, assunta quale punto di partenza pel calcolo della velocità, e che si riduce a  $7^h 52^m 52^s$  circa, invece di  $7^h 52^m 53^s$ , già da noi utilizzata. Un errore meno insignificante è stato riconosciuto nel dato orario, già comunicato da Granata, il quale, da  $7^h 55^m 44^s$ , va cambiato in  $7^h 56^m 3^s$ .

2. Nella tabella che segue sono riportate le varie località con a fianco la loro distanza da Avezzano (lat.  $42^\circ 2'$  c. N, long.  $13^\circ 25'$  c. E), assunto quale epicentro provvisorio, ed il loro tempo rispettivo. Nell'antipenultima colonna sono riportate le *velocità medie superficiali* calcolate in base all'ora media ( $7^h 52^m 52^s$ ) sopra accennata e che si riferisce alla distanza media di 70 km. dal presunto epicentro; mentre nella penultima colonna si trovano quelle ottenute mediante il confronto dei dati orari delle singole lo-

(1) G. Agamennone, *Il recente terremoto nella Marsica e gli strumenti sismici* (Rend. della R. Acc. dei Lincei; seduta del 7 febr. 1915).

(2) Dal 6 febbraio al 6 marzo ne sono state registrate altre 150 circa, della stessa origine!

calità con l'ora media (7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 11<sup>s</sup>) delle due ore, assai concordanti, d'Ischia e di Valle di Pompei, la quale corrisponde ad una distanza media di 155 km. da Avezzano.

Distanza da Avezzano	LOCALITÀ	Ora osservata (t. m. E. C.)	Velocità al secondo basandosi sull'ora media		
			7 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> 52 <sup>s</sup>	7 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> 11 <sup>s</sup>	7 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> 11 <sup>s</sup> - 8 <sup>s</sup> = 7 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> 3 <sup>s</sup>
Km. 64 c.	Montecassino . .	<sup>h</sup> <sup>m</sup> <sup>s</sup> 7 52 50			
" 68 c.	Rocca di Papa .	7 52 54 ± 3 <sup>s</sup>			
" 78 c.	Roma . . . . .	7 52 53 ± 2 <sup>s</sup>			
" 70	MEDIA . . . . .	7 52 52 c.			
" 150 c.	Ischia . . . . .	7 53 12	m. 4000		
" 160 c.	Valle di Pompei	7 53 10	" 5000		
" 155	MEDIA . . . . .	7 53 11	" 4500	m. 4500	m. 7730 c.
" 220 c.	Siena (Osservanza)	7 53 0	" (18,750)	(negativa)	(negativa)
" 220 c.	" (Università)	7 53 40 ± 10 <sup>s</sup>	" (3130 c.)	m. (2240 c.)	m. (1760 c.)
" 320 c.	Pola . . . . .	7 53 27	" 7140 c.	" (10,310 c.)	" 6880 c.
" 360 c.	Taranto . . . . .	7 53 31	" 7440 c.	" (10,250)	" 7320 c.
" 380 c.	Venezia . . . . .	7 55 37	" (1880 c.)	" (1540 c.)	" (1460 c.)
" 390 c.	Padova . . . . .	7 53 39	" 6810 c.	" 8390 c.	" 6530 c.
" 400 c.	Trieste . . . . .	7 53 39	" 7020 c.	" 8750	" 6810 c.
" 410 c.	Treviso . . . . .	7 53 31	" 8720 c.	" (12,750)	" (9110 c.)
" 420 c.	Chiavari . . . . .	7 53 47	" 6360 c.	" 7360 c.	" 6020 c.
" 440 c.	Mileto . . . . .	7 53 40	" 7710 c.	" (9830 c.)	" 7700 c.
" 500 c.	Catania . . . . .	7 54 18	" (5000)	" (5150 c.)	" (4600)
" 530 c.	Carloforte . . . .	7 54 37	" (4330 c.)	" (4360 c.)	" (3990 c.)
" 540 c.	Mineo . . . . .	7 53 30	" (12,370 c.)	" (20,260 c.)	" (14,260 c.)
" 560 c.	Moncalieri . . . .	7 54 6	" 6620 c.	" 7360 c.	" 6430 c.
" 580 c.	Graz . . . . .	7 53 59	" 7610 c.	" 8850 c.	" 7590 c.
" 600 c.	Domodossola . .	7 54 30	" (5410 c.)	" (5630 c.)	" (5110 c.)
" 720 c.	Vienna . . . . .	7 54 16	" 7740 c.	" 8690 c.	" 7740 c.
" 900 c.	Heidelberg . . .	7 54 35	" 8060 c.	" 8870 c.	" 8100 c.
" 940 c.	Darmstadt . . . .	7 54 45	" 7700 c.	" 8350 c.	" 7700 c.
" 940 c.	Barcellona . . . .	7 54 45	" 7700 c.	" 8350 c.	" 7700 c.
" 1300 c.	Amburgo . . . . .	7 55 33	" 7640 c.	" 8060 c.	" 7680 c.
" 1540 c.	Granata . . . . .	7 56 3	" 7700 c.	" 8050 c.	" 7690 c.
" 6640 c.	Cambridge . . . .	8 2 45	" 11,080 c.	" 11,300 c.	" 11,140 c.
	(Mass. U. S. A.)				
" 6780 c.	Ottawa (Canada).	8 2 57	" 11,090 c.	" 11,310 c.	" 11,150 c.

Nell'antipenultima colonna, subito si rivelano assai sospetti i valori ottenuti da *Siena* (Osserv.), *Siena* (Univ.), *Venezia* e *Mineo*, e destano qualche

dubbio quelli relativi a *Catania*, *Carloforte* e *Domodossola*, i cui dati orari possono essere inesatti per qualcuna delle regioni già esposte nella mia Nota precedente; ed è per questo che ho racchiuso tra parentesi i predetti 7 valori. Nella penultima colonna ho posto la parentesi non solo ai valori corrispondenti alle stesse 7 località, ma anche a quelle di Pola, Taranto, Treviso e Mileto, per il fatto che raggiungono cifre troppo alte e poco verosimili. Se si confrontano tra loro i valori corrispondenti delle due anzidette colonne, si troverà che, eccezion fatta per quelli di Siena (Univ.), Venezia e Carloforte, le velocità della penultima colonna sono tutte più alte, e la differenza si va in generale attenuando col crescere della distanza.

3. Questo fatto farebbe sospettare troppo elevata l'ora media ( $7^h 53^m 11^s$ ) d'Ischia e di Valle di Pompei, assunta quale punto di riferimento per il calcolo della penultima colonna. A prima giunta, parrebbe impossibile ogni dubbio in proposito, non solo per il grande accordo tra le due ore che hanno fornito la media, ma altresì per il modo indipendente col quale si ha il tempo-campione nelle due predette località; ma poi riflettendovi su, e considerando che un errore, sia pure di pochi secondi, nell'ora in questione può essere la causa dei valori così anormali della penultima colonna, il sospetto non può più sembrare tanto infondato. Così, diminuendo, ad es., di solo 8 secondi l'ora accennata, e cioè riducendola a  $7^h 53^m 3^s$ , diminuisce subito la variazione della velocità con la distanza, e si ottengono valori (quelli dell'ultima colonna) in assai miglior accordo con quelli della antipenultima. Ora la differenza di un 8 secondi è tutt'altro che impossibile negli attuali osservatori, anche di 1° ordine, a causa delle tante cause d'errore che possono ancora inquinare i dati orari. Prova ne sia: anzitutto i sensibili errori probabili di Siena (Univ.), Rocca di Papa e Roma, le sole località che han creduto di indicarli; poi le correzioni che si sono dovute arrecare alle primitive ore di Roma e Granata, già pubblicate; indi i dati orari di alcuni osservatori non affatto sicuri; e infine quelli certamente errati, e di molto, per altre stazioni, ciò che salta subito agli occhi costruendo l'*odografo*, cioè riportando sopra un foglio a quadretti le distanze come *ascisse*, e le ore come *ordinate* di tutte le località.

4. Ricostruendo l'odografo, ma omettendo i 7 dati orari dubbii o certamente errati, il suo andamento generale mostra che la velocità si è mantenuta press'a poco costante fino alla massima distanza considerata (Granata). Per tradurre meglio in cifre questo fatto, ho condensato i rimanenti 20 dati orari in 6 valori medi, ciascuno risultante dall'aggruppamento di 2 o più ore, nel modo che sembrava più naturale dall'ispezione dell'odografo. Si ottengono così 6 punti fittizi, costituiti come segue:

Al I punto (M. Cassino, Rocca di Papa e Roma, con distanze da 64 a 78 km.) com-  
petono l'ora media  $7^h 52^m 52^s$  e la distanza media di 70 km.

Al II punto (Ischia e Valle di Pompei, con distanze da 150 a 160 km.) competono l'ora media  $7^h 53^m 11^s$  e la distanza media di 155 km.

Al III punto (Pola, Taranto, Padova, Trieste, Treviso, Chiavari e Mileto con distanze da 320 a 440 km.) competono l'ora media  $7^h 53^m 36^s$  e la distanza media di circa 391 km.

Al IV punto (Moncalieri, Graz e Vienna, con distanze da 560 a 720 km.) competono l'ora media  $7^h 54^m 7^s$  e la distanza media di 620 km.

Al V punto (Heidelberg, Darmstadt e Barcellona, con distanze da 900 a 940 km.) competono l'ora media  $7^h 54^m 42^s$  e la distanza media di c. 927 km.

Al VI punto (Amburgo e Granata, rispettivamente a 1300 e 1540 km.) competono l'ora media  $7^h 55^m 48^s$  e la distanza media di 1420 km.

Combinando i dati di ogni punto fittizio con quelli del I o II, assunti come termine di confronto, si ottengono le seguenti velocità medie superficiali al secondo:

DISTANZE MEDIE DA AVEZZANO	VELOCITÀ IN BASE AL		
	I punto con l'ora m. $7^h 52^m 52^s$	II punto con l'ora m. $7^h 53^m 11^s$	II punto modificato con l'ora $7^h 53^m 3^s$
km. 155	m. (4470) c.	m. (4470) c.	m. 7730 c.
" 391 c.	" 7300 c.	" 9440	" 7150 c.
" 620	" 7320 c.	" 8300 c.	" 7270 c.
" 927 c.	" 7790 c.	" 8480 c.	" 7800 c.
" 1420	" 7670 c.	" 8060 c.	" 7670 c.
	m. 6912	media generale m. 7750	media generale m. 7524
	m. 7522 c. {media con l'esclu- sione del 1° valore}	m. 8570	

5. Da questo prospetto si vede come, volendo mantenere inalterata l'ora media, basata su Ischia e Valle di Pompei, si abbia nelle prime due colonne una velocità straordinariamente bassa (m. 4470) in corrispondenza della distanza media di 155 km. <sup>(1)</sup>, ed inoltre un salto enorme nei valori della velocità passando da detta distanza all'altra successiva, e relativamente tenue, di 391 km. Colpisce infine, nella colonna di mezzo, la decrescenza della velocità con la distanza, dopo che il 2° valore è più che raddoppiato in confronto del 1°. Queste gravissime anomalie spariscono nell'ultima colonna, sol per aver diminuito di appena 8 secondi l'ora media spettante al II punto. Questo fatto è assai eloquente e concorre a confermare il dubbio sull'esattezza delle ore d'Ischia e di Valle di Pompei.

(1) Nella mia Nota precedente avevo creduto di giustificare le velocità così modeste, che risultavano per Ischia e Valle di Pompei, con la stessa incerta posizione dell'epicentro e le relativamente tenui distanze del medesimo dalle predette località. Ma poi, dopo più matura riflessione, ho finito per persuadermi che, per spiegare differenze così notevoli, bisognava invocare un'incertezza troppo grande per il punto da cui irraggiò il moto sismico.



La media di tutti i valori, escluso il primo, della 1<sup>a</sup> colonna è di m. 7522, cioè quasi identica a quella (m. 7524) della 3<sup>a</sup> colonna e poco diversa dalla media (m. 7465) dei 15 valori che restano nell'antipenultima colonna della tabella a pag. 430, dopo l'esclusione di quelli tra parentesi e dei due relativi alle località americane (<sup>1</sup>).

In base a questa nuova velocità di circa 7530 m., supposta valevole anche dall'epicentro fino alla distanza di 70 km., quest'ultima sarebbe ancora stata percorsa in circa 9 secondi, e perciò l'ora all'epicentro risulta adesso come segue:

$$7^h 52^m 52^s - 9^s = 7^h 52^m 43^s$$

6. In quanto ad una sensibile variazione della velocità con la distanza, parrebbe che anche questa volta non fossimo autorizzati ad ammetterla, anche se ci volessimo attenere ai valori della 1<sup>a</sup> colonna e senza alterare l'ora media di Ischia e Valle di Pompei. Come spiegare, infatti, l'enorme salto della velocità tra i 155 e 391 km., poi la stazionarietà tra 391 e 620 km., e infine la diminuzione tra 927 e 1420 km.? Ove poi si prendesse in considerazione l'ultima colonna, si troverebbe la velocità dapprima lievemente decrescente e poi crescente, per ritornare, in ultimo, quasi al valore primitivo.

Se questa variazione realmente esiste, almeno per le località più distanti, la medesima dev'essere così tenue da restare ancora mascherata da errori, sebbene piccoli, nelle ore osservate, oppure influenzata dalla diversa costituzione geologica delle regioni attraversate (<sup>2</sup>). È quello che io ho sempre trovato nei miei calcoli sulla velocità di propagazione dei numerosi terremoti da me studiati, a partire da quelli di Zante del 1893, purchè non si avesse da fare con distanze superiori ai 2000 km. Ed una buona conferma a questo mio modo di vedere è venuta anche dal valente direttore del R. Osservatorio geodinamico di Casamicciola il quale ha studiato la propagazione dei terremoti Calabri dell'8 settembre 1905, del 23 ottobre 1907 e 28 dicembre 1908 (<sup>3</sup>). Infatti, avendo egli condotto il calcolo della velocità con

(<sup>1</sup>) La tenue differenza tra quest'ultima cifra e quella (m. 7690) che si ottenne nell'altra mia Nota in base ai 10 valori più attendibili, è in parte spiegata con le correzioni adesso arretrate alle ore di Roma e Granata.

(<sup>2</sup>) Trattandosi, nel caso nostro, di velocità medie superficiali, sarebbe strano il non volere ammettere la possibilità di tale variazione, se non altro pel fatto che, mentre la propagazione si può effettuare anche per le corde, nei nostri calcoli figurano, invece, le distanze arcuali, di guisa che, man mano che crescono le distanze, si fa vieppiù sentire la differenza tra le lunghezze delle corde e quelle dei rispettivi archi di circolo massimo terrestre: e per tal fatto la nostra velocità deve indubbiamente aumentare. Rimando, a tal proposito, a due mie Note pubblicate in collaborazione del compianto mio collega professor F. Bonetti e presentate alla R. Acc. dei Lincei nelle sedute del 6 e 20 gennaio del 1895.

(<sup>3</sup>) G. Grablovitz, *Sulla velocità della propagazione sismica* (Boll. della Soc. sism. ital., vol. XIII, pag. 259).

due metodi diversi, e cioè supponendo dapprima costante la velocità, almeno entro 2500 km., e poi uniformemente variabile, trovò che era quasi indifferente riguardare la progressione rettilinea nel 1° caso o curvilinea nel 2°, poichè gli errori residui non presentavano se non differenze inapprezzabili tra retta e curva.

7. Che poi la velocità cresca effettivamente, ed anzi in modo sensibilissimo, con una assai maggiore distanza, è dimostrato in modo evidente dal valore di quasi 11100 metri che vien fuori concordemente per Cambridge (lat.  $42^{\circ} 23' N$ , long.  $71^{\circ} 8' W$ ) e per Ottawa (lat.  $45^{\circ} 24' N$ , long.  $75^{\circ} 43' W$ ), distanti rispettivamente 6640 e 6780 km. da Avezzano. E siccome non vi può essere alcun dubbio sull'esattezza delle ore di queste due località, e così pure sull'ora media, presa da me quale punto di riferimento a soli 70 km. dall'epicentro, così dobbiamo ritenere sicura la predetta velocità. Nè a spiegare la grande differenza tra la stessa e quella (circa 7530 metri) da noi trovata quale media per tutte le stazioni situate sino a 1540 km. dall'epicentro, può invocarsi la maggiore lunghezza di circa 300 km. dell'arco di circolo massimo che passa per Avezzano e ciascuna località americana, per rispetto alla corda che lo sottende; poichè, introducendo nel calcolo la lunghezza di quest'ultima, la velocità di 11100 metri si abbasserebbe per non più di un 500 metri. Bisogna dunque ritenere che, effettuandosi la propagazione lungo la corda, la velocità cresca in modo ragguardevole sol per la natura degli strati profondi attraversati, i quali, nel caso nostro, raggiungono la massima profondità di quasi 850 km., lungo la corda Avezzano-Cambridge e di ben 880 km. per la corda Avezzano-Ottawa! (¹).

Quando saranno conosciuti i dati orari di tanti altri osservatori sparsi su tutta la terra, sarà possibile una più esauriente ricerca sul meccanismo di propagazione di questo terremoto il quale, quasi a compenso degli immensi danni arrecati, avrà potuto contribuire anch'esso alla soluzione di non pochi problemi, ancora oscuri e che interessano in sommo grado la sismologia (²).

(¹) Per dare un'idea concreta della lunghezza di queste corde, dirò che la prima è una ventina di km. più corta, e la seconda un centinaio di km. più lunga del lato dell'esagono regolare inscritto nel circolo massimo terrestre, lato che si sa uguagliare il raggio stesso (km. 6370 circa) del nostro globo.

(²) Nel licenziare le bozze di stampa ci sono pervenuti i bollettini sismici degli osservatori di *Cracovia* e *S. Fernando* (presso Cadice) alle distanze rispettive di circa 1020 e 1780 km. da Avezzano. Poichè l'inizio del sismogramma è avvenuto nei medesimi rispettivamente a  $7^h 54^m 40^s$  e  $7^h 56^m 15^s$ , così combinando questi dati orari con l'ora media  $7^h 52^m 52^s$  relativa alla distanza media di 70 km. dall'epicentro, ne risulta una velocità di circa 8800 metri per Cracovia e 8420 per S. Fernando. Valori ben più alti verrebbero fuori, ove si volesse assumere, quale punto di confronto, l'ora media  $7^h 53^m 11^s$ , desunta dai dati d'Ischia e di Valle di P.

Chimica. — *Sui composti di vanadiurea* <sup>(1)</sup>. Nota di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

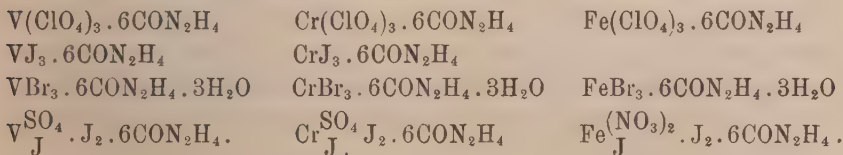
Le ricerche di E. Petersen <sup>(2)</sup>, di I. Locke e H. Edwards <sup>(3)</sup>, e specialmente di A. Piccini <sup>(4)</sup> e dei suoi allievi, hanno messo in luce l'analogia che esiste tra i composti del vanadio trivalente e quelli del cromo trivalente. I composti presi in considerazione furono sali idrati (cloruro, bromuro, ioduro) e sali doppi (fluoruri, cianuri, tiocianati, allumi, ossalati). In base ai risultati di tali ricerche, si può dire che il vanadio trivalente dà origine a cationi idrati e ad anioni complessi che differiscono da quelli corrispondenti del cromo soltanto per una minore stabilità in soluzione.

È ben noto che il cromo, oltre che con molecole di acqua e con radicali acidi, può formare ioni complessi con molecole di urea, di ammoniaca e di basi organiche. In due Note precedenti <sup>(5)</sup> ho mostrato che il ferro trivalente, la cui analogia col cromo, nei sali idrati e nei sali doppi, ricorda in tutto quella del vanadio trivalente, può dare, coll'urea e con alcune basi organiche, complessi analoghi a quelli del cromo.

Allo scopo di chiarire l'unica parte rimasta oscura nei rapporti tra il vanadio e il cromo, mi parve opportuno di estendere al vanadio le ricerche da me compiute per il ferro. Come prevedevo, ho ottenuto tanto composti di vanadiurea quanto vanadiammine.

Intorno a queste ultime riferirò in una prossima Nota. Espongo nella presente i risultati che ho avuto con l'urea.

I composti di vanadiurea hanno la formula generale  $VX_3 \cdot 6CON_2H_4$  e sono perfettamente analoghi ai composti corrispondenti di ferri- e cromiurea, come risulta dall'esame delle seguenti formule:



<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale dell'Università di Ferrara.

<sup>(2)</sup> I. pr. Chem. [2] 40<sub>51</sub> (1889).

<sup>(3)</sup> Am. Chem. I, 20<sub>594</sub> (1898).

<sup>(4)</sup> Piccini, Z. anorg. Ch., 11<sub>108</sub> (1895), 13<sub>441</sub> (1896); Piccini e Brizzi, Z. anorg. Ch., 19<sub>394</sub> (1899); Cioci, Z. anorg. Ch., 19<sub>311</sub> (1899).

<sup>(5)</sup> Rendiconti Accad. Lineei, XIX, 2<sup>o</sup><sub>591</sub> (1910); XXII, 1<sup>o</sup><sub>367</sub> (1913).

Questi composti rassomigliano fra di loro anche nel colore. I composti di cromiurea (ad anione incolore) sono verdi; quelli di ferriurea sono azzurrognoli e quelli di vanadiurea sono di un bel verde azzurro. I perioduri sono tutti rosso-bruni. Non mi è stato possibile preparare il bicromato e il permanganato di vanadiurea perchè l'acido cromatico e l'acido permanganico ossidano il vanadio trivalente anche in presenza di urea.

Mi sembra ovvio di attribuire ai composti di vanadiurea la costituzione proposta a A. Werner <sup>(1)</sup> per i corrispondenti composti di cromo, cioè considerarli derivati dagli aquosali per sostituzione delle sei molecole di acqua con sei molecole di urea che restano legate attorno all'atomo metallico centrale mediante valenze secondarie di ossigeno, come è espresso dalla formula:

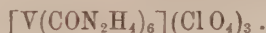


La sostituzione delle molecole di acqua colle molecole di urea si compie per i sali di vanadio, come per i sali di ferro, a freddo, mentre per i sali di cromo <sup>(2)</sup> è possibile soltanto a caldo. Ciò prova che gli ioni idrati di vanadio e di ferro sono assai meno stabili degli ioni idrati di cromo.

Anche il complesso  $[V(CON_2H_4)_6]$  è, come il complesso  $[Fe(CON_2H_4)_6]$ , molto meno stabile del complesso  $[Cr(CON_2H_4)_6]$ . Esso esiste in soluzione soltanto in presenza di un grande eccesso di urea.

#### PARTE SPERIMENTALE.

##### *Perclorato di vanadiurea.*



Gr. 5 di anidride vanadica in polvere vennero sospesi in 40 cc. di una soluzione di acido solforico al 25 % e trattati con una corrente di anidride solforosa, prima a freddo, poi a caldo. Si ottenne un liquido turchino limpido, nel quale tutto il vanadio era contenuto nella forma  $VX_4$ . Questo liquido, previa eliminazione dell'eccesso di anidride solforosa mediante ebullizione, venne sottoposto in una capsula di platino alla riduzione elettrolitica. La capsula fungeva da catodo. Il liquido anodico, una soluzione di acido solforico al 20 %, era contenuto in un vaso poroso che lo separava dal liquido catodico. L'anodo era un filo di platino.

S'impiegò una densità di corrente al catodo di circa tre ampères per dm.<sup>2</sup>, e si prolungò l'elettrolisi finchè il liquido catodico assunse un bel colore verde e diede le reazioni dei sali del vanadio trivalente (ad es. precipitato

<sup>(1)</sup> Ann., 322 <sub>1902</sub> (1902).

<sup>(2)</sup> Pfeiffer, Ber. 36 <sub>1903</sub> (1903).



verde con ammoniaca). La soluzione verde venne versata in un bicchiere, addizionata di urea in sostanza fino quasi a saturazione, e poi vi si aggiunse la soluzione di gr. 20 di perclorato sodico in poca acqua. Si ottenne subito un abbondante precipitato cristallino verde-azzurro, che venne spremuto alla pompa, lavato con poca acqua e con alcool, e infine seccato nel vuoto su acido solforico.

In questa sostanza il vanadio venne dosato come anidride vanadica per calcinazione, previo ripetuto trattamento a caldo con acido nitrico concentrato. L'acido perclorico venne determinato per via indiretta. La sostanza venne trattata con carbonato di bario sospeso in acqua; e dal bario passato in soluzione e dosato come solfato, si calcolò l'acido perclorico.

	Calcolato per $[V(CON_2H_4)_6](ClO_4)_3$	Trovato
V	7,19	7,26
N	23,70	23,40
Cl	15,00	15,12

Il perclorato di vanadiurea allo stato di secchezza è stabile all'aria: non si ossida, nè assorbe umidità. In acqua è poco solubile a freddo, più solubile a caldo. La sua soluzione, appena preparata, è verde, ma diventa rapidamente giallo-bruna. Ciò è dovuto all'idrolisi; infatti, per aggiunta di un acido, ricompare la colorazione verde. In una soluzione concentrata di urea il perclorato e gli altri sali di vanadiurea si sciolgono con colorazione verde-azzurra persistente, perchè in tali condizioni il complesso  $[V(CON_2H_4)_6]$  è abbastanza stabile.

*Bromuro di vanadiurea.*  
 $[V(CON_2H_4)_6] Br_3 \cdot 3H_2O$ .

Questo composto si può preparare tanto aggiungendo un eccesso di urea a una soluzione concentrata di  $VBr_3 \cdot 6H_2O$  preparato secondo Piccini e Brizzi (<sup>1</sup>), quanto aggiungendo urea e bromuro sodico a una soluzione di solfato di vanadio trivalente preparato come fu detto sopra per il perclorato.

È una polvere cristallina di un verde-azzurro chiaro, solubile, in acqua, con colorazione bruna e, in presenza di un acido o di una grande eccesso di urea, con colorazione verde.

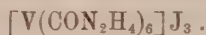
Nell'analisi di questa sostanza il bromo venne determinato volumetricamente col metodo Volhard, previa eliminazione del vanadio con carbonato di bario (<sup>2</sup>).

(<sup>1</sup>) Z. anorg. Ch., 19<sub>888</sub> (1899).

(<sup>2</sup>) A. Piccini, Z. anorg. Ch., 13<sub>442</sub> (1897).

	Calcolato per $[V(CON_2H_4)_6]Br_3 \cdot 3H_2O$	Trovato
V	7,23	7,29
N	23,85	23,76
Br	34,02	34,20

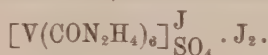
*Ioduro di vanadiurea.*



Si ottenne aggiungendo urea e ioduro sodico, ambedue in eccesso, ad una soluzione concentrata di  $V_2(SO_4)_3$ . Cristalli aghiformi verdi-azzurri, solubili in acqua, con colorazione bruna.

	Calcolato per $[V(CON_2H_4)_6]J_3$	Trovato
V	6,44	6,47
N	21,23	21,18
I	48,09	47,89

*Perjoduro - solfato di vanadiurea.*



Aggiungendo ad una soluzione di  $V_2(SO_4)_3$  una soluzione di joduro sodico e jodio, si ha tosto un precipitato rosso-bruno costituito di aghetti microscopici. Non può sorgere il dubbio che il vanadio contenuto in questo composto appartenga a una forma di combinazione superiore alla trivalente, e cioè che lo jodio abbia agito come ossidante, perchè è noto che l'acido jodidrico riduce il  $V^{IV}$  a  $V^{III}$  con liberazione di jodio.

Lo jodio totale venne determinato col metodo Volhard, previa riduzione dello jodio addizionato a jodio-jone mediante acqua ossigenata e soda caustica.

	Calcolato per $[V(CON_2H_4)_6]SO_4 \cdot J \cdot J_2$	Trovato
V	5,74	5,67
N	18,93	18,82
I	42,89	42,65
S	3,61	3,50

Chimica. — *Sopra alcuni derivati dell'acido  $\beta$ -trifenil-lattico* <sup>(1)</sup>. Nota di R. DE FAZI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Per azione della luce, sopra una mescolanza di benzofenone ed acido fenil-acetico, il prof. Paternò e G. Chieffi <sup>(2)</sup> avevano ottenuto un composto dalla formula  $C_{21}H_{18}O_3$ , al quale attribuirono la costituzione di acido  $\beta$ -trifenil-lattico.

Ammisero cioè che il benzofenone e l'acido fenil-acetico si fossero combinati secondo lo schema seguente:



per analogia con altre simili condensazioni che avvengono fra composti che contengono il gruppo CO e quelli che contengono il gruppo  $CH_2$ .

Dal prof. Paternò ebbi un poco di questo acido, da lui ottenuto per la prima volta, per cercare di prepararne alcuni derivati, e per vedere se il suo comportamento chimico fosse in accordo con la formula di costituzione attribuitagli.

A questo scopo cercai dapprima di disidratare questo acido nella speranza di ottenere l'acido  $\beta$ -trifenil-acrilico, per confrontarlo con quello che era stato preparato da Heyl e Meyer <sup>(3)</sup>.

Questi autori infatti, riscaldando a  $220^\circ$  il dicloro-difenil-metano con il cianuro di benzile, avevano ottenuto il nitrile dell'acido  $\beta$ -trifenil-acrilico, che per saponificazione, trasformarono nell'ammide e poi nell'acido  $\beta$ -trifenil-acrilico. Lo stesso acido ottennero saponificando l'etere metilico dell'acido  $\beta$ -trifenil-acrilico che si forma riscaldando a  $220^\circ$  il dicloro-difenil-metano con l'etere metilico dell'acido fenil-acetico. In questa ultima reazione, come prodotto secondario ottennero una sostanza, in cristalli rossi splendenti, che fonde a  $150-151^\circ$ , e che riconobbero per  $\alpha$ - $\beta$ -difenil-indone.

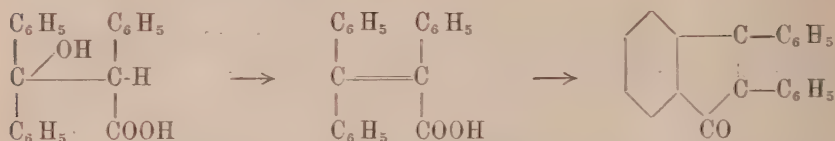
Per azione dell'anidride fosforica, sull'acido del prof. Paternò, ho ottenuto il difenil-indone di Heyl e Meyer. La formazione di questo prodotto conferma la costituzione attribuita all'acido  $\beta$ -trifenil-lattico. L'anidride fosforica avrebbe eliminato prima una molecola di acqua formando l'acido  $\beta$ -tri-

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

<sup>(2)</sup> Paternò e Ghieffi, Gazz. Chim. Ital. 40 (2) 323 (1910).

<sup>(3)</sup> Heyl e Meyer, Ber. 28, 2787 (1895).

fenil-acrilico. poi un'altra, dando luogo alla formazione del difenil-indone, secondo lo schema seguente:



Quantunque io non sia riuscito a trasformare l'acido  $\beta$ -trifenil-lattico in acido  $\beta$ -trifenil-acrilico, pur tuttavia ho ottenuto l'etere etilico dell'acido  $\beta$ -trifenil-acrilico, facendo passare una corrente di HCl gassoso attraverso ad una soluzione alcoolica dell'acido  $\beta$ -trifenil-lattico

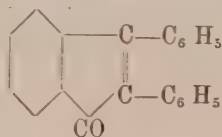
Ho tentato di ottenere l'etere etilico dell'acido  $\beta$ -trifenil-lattico, preparando il sale d'argento di questo acido e facendovi agire lo ioduro di etile. Ho ottenuto però una sostanza, che all'analisi non dà risultati corrispondenti per l'etere etilico dell'acido  $\beta$ -trifenil-lattico. La piccola quantità di sostanza non mi ha permesso di fare altre ricerche per chiarire la sua costituzione.

Ho anche tentato di fare la sintesi dell'acido  $\beta$ -trifenil-lattico con una reazione analoga a quella con la quale Rupe e Busolt<sup>(1)</sup> avevano preparato l'acido  $\beta$ -difenil-lattico.

Ho fatto agire, a caldo, il benzofenone e l'etere etilico dell'acido fenil-bromo-acetico in presenza di zinco, per ottenere l'etere etilico dell'acido  $\beta$ -trifenil-lattico; ma ho ottenuto un prodotto, difficile a purificarsi, sul quale, per ora, non ho fatto altre ricerche. Non avendo più acido  $\beta$ -trifenil-lattico, sono costretto perciò a interrompere il lavoro finchè non ne avrò preparato dell'altro.

*Azione dell'anidride fosforica sull'acido  $\beta$ -trifenil-lattico.*

*$\alpha$ - $\beta$ -Difenil-indone.*



Ho disciolto gr. 2 di acido  $\beta$ -trifenil-lattico in 800 cc. di xilene, e alla soluzione ho aggiunto poi circa gr. 10 di anidride fosforica. Ho lasciato reagire a b. m. per 5 ore. Dopo pochi minuti, la soluzione, che era incolore, è divenuta di colore giallo arancio-intenso.

Dopo avere distillato in corrente di vapore lo xilene, nel pallone rimane una sostanza semisolida, di colore granato. Estraeendo questa con etere e

<sup>(1)</sup> Rupe e Busolt, Ber. 40, 4537 (1907).



facendo poi distillare il solvente, resta un olio che, per raffreddamento, cristallizza in prismi di colore rosso-granato.

Si discioglie, non molto, nell'alcool etilico bollente, e per raffreddamento non si deposita nulla.

Lasciando svaporare lentamente l'alcool, a temperatura ordinaria, si depositano dei bellissimi prismi, ben formati, di colore rosso rubino. Fondono a 151-153°.

Da gr. 2 di acido  $\beta$ -trifenil-lattico, si ottengono circa gr. 0,50 di questo prodotto.

Si dissecca a 100° e si analizza:

sostanza gr. 0,2283	CO <sub>2</sub> gr. 0,7453	H <sub>2</sub> O gr. 0,1064
donde %	trovato	C 89,03
		H 5,21
C <sub>21</sub> H <sub>14</sub> O	calcolato	C 89,40
		H 4,90

Questa sostanza è insolubile nell'acqua; è solubile nell'alcool etilico e metilico; più solubile in acetone e in benzolo.

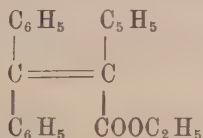
Neppure a caldo si discioglie negli idrati alcalini.

Con H<sub>2</sub> SO<sub>4</sub> concentrato, a freddo, dà una bella colorazione verde-smeraldo; a caldo il colore verde passa prima al giallo-arancio, poi al rosso-rubino.

Non si decolora con anidride solforosa.

Ha caratteri identici all' $\alpha$ - $\beta$ -difetil-indone che Heyl e Meyer <sup>(1)</sup> avevano ottenuto come prodotto secondario nella saponificazione dell'etere metilico dell'acido  $\beta$ -trifenil-acrilico.

*Etere etilico dell'acido  $\beta$ -trifenil-acrilico.*



Ho disciolto gr. 3 di acido  $\beta$ -trifenil-lattico in 300 cc. di alcool etilico; ed ho fatto passare attraverso a questa soluzione, una corrente di HCl gassoso, fino a completa saturazione. La reazione avviene con svolgimento di calore, e occorre raffreddare esternamente il recipiente. La soluzione da incolore, diviene di colore giallo-scuro.

Dopo aver lasciato stare per 12 ore, a temperatura ordinaria, ho distillato l'alcool, ed ho ripreso il residuo con una soluzione diluita di bicarbonato di sodio, fino a reazione alcalina. Precipita così una sostanza polverosa, di colore grigio scuro, solubile in acqua bollente, più solubile nell'alcool.

(<sup>1</sup>) Heyl e Meyer, loc. cit.

Dalla soluzione alcoolica, per aggiunta di acqua, precipita una sostanza fioccosa di colore bianco sporco.

È solubilissima in benzolo e acetone, anche a freddo.

Si cristallizza da una mescolanza di acqua ed alcool (1:1). Si hanno, così, degli aghetti bianchi, che fondono a 119-120°.

La sostanza, dissecata a 100°, si analizza:

sostanza gr.	0.2081	CO <sub>2</sub> gr.	0.6404	H <sub>2</sub> O gr.	0.1136
donde %	trovato	C	83,93	H	6,10
C <sub>23</sub> H <sub>20</sub> O <sub>2</sub>	calcolato	C	84,20	H	6,10

Questo etere dà, con H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> concentrato, a freddo, una bella colorazione verde smeraldo, che, per riscaldamento, passa al rosso arancio e poi al rosso rubino.

*Azione dello ioduro di etile  
sul sale d'argento dell'acido β-trifenil-lattico.*

Su gr. 5,2 del sale d'argento dell'acido β-trifenil-lattico, ben dissecato, in 20 cc. di alcool, ho fatto agire, a caldo, per 1 ora, cc. 15 di ioduro d'etile.

La soluzione, da incolore, diviene di colore giallo pallido, e al fondo del recipiente si deposita lo ioduro d'argento. Filtro, lavo bene con alcool bollente; poi distillo tutto l'alcool e lo ioduro d'etile, che non ha reagito. Rimane così un olio, denso, di colore rosso scuro, che per raffreddamento cristallizza. Si discioglie molto facilmente in alcool etilico.

Anche questo prodotto, così ottenuto, si colora, a freddo, con H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> concentrato, in un bel verde smeraldo; a caldo passa dal colore arancio al rosso rubino.

Si cristallizza da una mescolanza di acqua ed alcool (1:1). Si hanno, così, dei grossi prismi trasparenti, incolori, che fondono a 116-119°.

La sostanza, dissecata a 100°, è stata analizzata:

I	sostanza gr.	0,2419	CO <sub>2</sub> gr.	0,7318	H <sub>2</sub> O gr.	0,1339
II	sostanza gr.	0,2561	CO <sub>2</sub> gr.	0,7746	H <sub>2</sub> O gr.	0,1403
III	sostanza gr.	0,2390	CO <sub>2</sub> gr.	0,7232	H <sub>2</sub> O gr.	0,1336
	donde %	trovato:				
		C 82,51 — 82,49 — 82,53				
		H 6,19 — 6,13 — 6,25				

I risultati analitici ottenuti sono molto differenti dal calcolato per la formula C<sub>23</sub>H<sub>22</sub>O<sub>2</sub>, dell'etere etilico dell'acido β-trifenil-lattico, per la quale si calcola

C % 79.8      H % 6,3.

Per ora non saprei che formula attribuire a questa sostanza: esperienze che mi propongo di eseguire in seguito, potranno forse chiarirne la costituzione.

**Cristallografia.** — *Sullo zolfo di Zonda-S. Juan* (Repubblica Argentina). Nota di C. PERRIER, presentata dal Socio C. PARONA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Sui borati. Sistema  $\text{Na}_2\text{O}$ ,  $\text{B}_2\text{O}_3$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  a  $60^\circ$* . Nota I di U. SBORGI e F. MECACCI, presentata dal Socio R. NASINI.

In una serie di Note precedenti vennero studiati, da uno di noi <sup>(2)</sup>, diversi sistemi costituiti da  $\text{B}_2\text{O}_3$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  e ossidi di metalli alcalini e alcalino-terrosi a  $30^\circ$ , dal punto di vista della regola delle fasi, allo scopo di precisare la composizione dei borati formantisi come fasi stabili, ottenendo insieme le loro curve di solubilità, coi metodi che in dette Note vennero ampiamente descritti.

Degli alcalini il sistema  $\text{Na}_2\text{O}$  -  $\text{B}_2\text{O}_3$  -  $\text{H}_2\text{O}$  era stato già studiato da Dukelski <sup>(3)</sup>, a  $30^\circ$ : cosicchè, proseguendo ora il nostro studio a temperature diverse da  $30^\circ$ , riprendiamo appunto da quel sistema. In questa Nota riferiamo intorno ai risultati ottenuti a  $60^\circ$  per tutta la parte del diagramma che riguarda i composti che si ottengono come fase solida a partire dall'acido borico sino al metaborato; prossimamente riferiremo sui composti dal metaborato sino alla soda caustica.

I borati di sodio descritti più o meno sicuramente fin qui sono quelli che riportiamo nella tabella seguente, insieme colle loro composizioni centesimali.

La notazione adottata nella tabella è la consueta, e cioè: il primo numero indica le molecole di  $\text{Na}_2\text{O}$ ; il secondo le molecole di  $\text{B}_2\text{O}_3$ ; il terzo le molecole di  $\text{H}_2\text{O}$ .

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Pisa.

(2) U. Sborgi, *Sui borati*. Questi Rendiconti, anni 1912, 1913, 1914.

(3) M. Dukelski, *Zeitschr. f. anorgan. Chemie* 50 (1906) 38 e seguenti.

TABELLA I.

Composte	Composizione centesimale			SPERIMENTATORI <sup>(1)</sup>
	Na <sub>2</sub> O %	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> %	H <sub>2</sub> O %	
1-1-4	30.43	34.29	35.28	Benedikt (Ber. deutsch. chem. Ges. 7, 700).
1-1-4.5	29.14	32.85	38.01	Atterberg (Oefvers af K. Vetensk. Akad. Förh. 1874, 6, 16).
1-1-5.5	26.87	30.29	42.83	Atterberg, loc. cit.
1-1-6	25.86	29.16	44.98	Berzelius (Pogg. Ann. 34. 566); Bechi (Sillim. Journ. [2] 19 Nr. 55, p. 120).
1-1-8	22.49	25.35	52.16	Ditscheiner (Ber. deutsch. Ges. 7 402); Rammelsberg (Pogg. Ann. 49. 460).
1-2-4	22.66	51.07	26.27	Schweizer (Lieb. Ann. 76, 267).
1-2-5	21.26	47.93	30.81	Baron. Payen, Soubeiran, Pellerin etc.
1-2-10	16.25	36.63	47.12	Vohl, Phillips, Campbell, Berzelius, Schweizer, Stromeyer Marignac, Bechi etc.
1-3- <i>x</i>	22.82	77.18	—	Spiegel (Chem. Ztg. 1904, 750).
1-4-10	11.89	53.63	34.48	Bolley (Ann. Pharm. 68, 122).
1-5-10	10.49	59.11	30.40	Atterberg, loc. cit.
1-6-12	8.89	60.17	30.94	Tünnermann (Kastn. Arch. 20, 8).
2-5- <i>x</i>	26.19	73.81	—	Barthe (J. Pharm. Chim. [6] 1, 303).

Nello studio a 30°, il Dukelski confermò la esistenza, come fasi stabili solide, dei composti 1-1-4, 1-1-8, 1-2-10 e 1-5-10. Ecco ora quanto risulta dalle nostre esperienze a 60°:

I modi di esperienza ed i metodi analitici da noi adoperati sono del tutto uguali a quelli già descritti nelle precedenti Note; e per brevità stimiamo opportuno di rimandare a quelle.

Per la estrazione dei campioni di soluzione adopravamo le solite pipette due volte ricurve; ma usavamo di riscaldarle a circa 60° prima di introdurle nella soluzione, a fine di evitare variazioni di temperatura nelle zone della soluzione dove avveniva l'estrazione.

La preparazione dei miscugli posti a reagire venne fatta nei modi più variati, come apparisce dalla tabella che segue: così talvolta ponevamo a reagire acido borico, soda caustica ed acqua; talvolta partivamo da un borato preformato con aggiunta della base o dell'acido ecc., per constatare se si giungeva agli stessi punti o a punti di una stessa curva per tutte le vie possibili, il che meglio ci assicurava di aver raggiunto l'equilibrio. Del resto, ci assicuravamo di aver raggiunto l'equilibrio analizzando campioni estratti successivamente. Nella tabella seguente riportiamo anche gli intervalli di tempo, durante i quali ciascun miscuglio veniva tenuto in agitazione in termostato.

<sup>(1)</sup> Cfr. Gmelin Kraut's, Handb. d. anorg. Chemie, Bd. II, Abt 1 (1906), pag. 415 e seguenti.



TABELLA II.

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione in termostato	Soluzione			Resto			Corpo di fondo
			Na <sub>2</sub> O o/o	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> o/o	H <sub>2</sub> O o/o	Na <sub>2</sub> O o/o	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> o/o	H <sub>2</sub> O o/o	
1	Acido borico, Acqua . . . .	6 giorni	—	7.39	92.61	...	...	...	H <sub>3</sub> BO <sub>3</sub>
2	Acqua, Borace, Ac. borico	2 "	0.58	9.63	89.79	0.24	39.96	59.80	
3 a)	" " "	4 "	1.38	13.68	84.94	...	...	...	
3 b)	" " "	5 "	1.39	13.92	84.69	0.44	43.20	56.36	"
4 a)	Acqua, Soda caustica e	10 "	2.91	20.13	76.96	...	...	...	"
4 b)	Acido borico . . . . .	11 "	2.92	20.26	76.82	1.21	42.47	56.32	
5 a)	Acqua, Soda caustica e	5 "	3.22	21.06	75.72	...	...	...	
5 b)	Acido borico . . . . .	9 "	3.08	20.74	76.18	0.88	44.03	55.09	"
6 a)	Acqua, Soda caustica e	5 "	3.44	22.51	74.05	...	...	...	H <sub>3</sub> BO <sub>3</sub> 1-5-10
6 b)	Acido borico . . . . .	6 "	3.41	22.29	74.30	3.26	45.60	51.40	
7	Acqua, Soda c., Ac. borico	2 "	3.44	22.17	74.39	...	...	...	
8	Acqua, Borace, Ac. borico	6 "	3.40	22.59	74.01	5.44	42.05	52.51	"
9 a)	Acqua, Soda caustica e	9 "	3.36	21.67	74.97	...	...	...	1-5-10
9 b)	Acido borico . . . . .	11 "	3.22	21.94	74.74	7.57	46.45	45.98	
10	Acqua, Borace, Ac. borico	3 "	4.40	23.76	71.84	8.36	46.91	44.73	
11	Acqua, Soda c., Ac. borico	3 "	4.46	24.07	71.47	11.10	59.40	29.50	"
12	Acqua, Soda, Ac. tetraborico	7 "	5.10	25.62	69.28	8.56	46.80	44.64	"
13	Acqua, Soda c., Ac. borico	1 "	5.45	27.08	67.47	10.71	58.83	30.46	"
14 a)	" " "	8 "	6.11	28.94	64.95	...	...	...	"
14 b)	" " "	9 "	6.08	28.38	65.54	8.90	48.82	42.28	
15 a)	Acqua, Borace e Acido bo-	7 "	6.38	29.13	64.49	...	...	...	
15 b)	rico . . . . .	8 "	6.29	28.77	64.94	6.80	33.23	59.97	"
16	Acqua, Soda caustica 1-5-10	9 "	6.35	29.50	64.15	—	—	—	"
17	" " "	2 "	7.15	30.26	62.59	8.84	45.43	45.71	
18 a)	Soda, Acido borico,	3 "	8.41	33.77	57.82	—	—	—	
18 b)	Acqua . . . . .	5 "	8.29	33.57	58.14	9.35	44.73	45.92	"
19 a)	" " "	3 "	8.84	34.91	56.25	—	—	—	"
19 b)	" " "	4 "	8.53	34.31	57.16	9.52	44.04	46.44	
20	Acqua, Soda c., Ac. borico	3 "	11.29	41.47	47.24	12.83	47.81	39.36	
21 a)	Acqua, Soda caustica e	4 "	11.14	39.90	48.96	...	...	...	1-5-10 + 1-2-5
21 b)	Acido borico . . . . .	6 "	11.02	39.90	49.08	18.83	46.69	34.84	

Segue: TABELLA II.

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione in termostato	Soluzione			Resto			Corpo di fondo
			Na <sub>2</sub> O %	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> %	H <sub>2</sub> O %	Na <sub>2</sub> O %	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> %	H <sub>2</sub> O %	
22 a)	Acqua, Soda caustica, Bo-	4 giorni	8.42	28.05	63.53	...	...	...	1-2-5
22 b)	race, Acido borico. . . . .	5 "	8.32	27.98	63.70	15.25	39.13	45.62	"
23 a)	Acqua, Borace e Acido bo-	9 "	8.15	27.59	64.26	...	...	...	"
23 b)	rico. . . . .	11 "	7.96	27.11	64.93	8.68	28.88	62.44	"
24 a)	Acido borico, Borace e	9 "	7.77	25.70	66.53	...	...	...	"
24 b)	Acqua. . . . .	11 "	7.77	25.73	66.50	12.18	33.52	54.30	"
25	Acqua, Soda c., Ac. borico	3 "	7.57	24.41	68.02	...	...	...	"
26	" " "	2 "	6.84	20.40	27.24	...	...	...	"
27	" " "	14 "	6.48	19.75	73.77	10.95	28.59	60.46	"
28	Acqua, Borace, Ac. borico	2 "	5.77	16.58	77.65	13.94	32.23	53.83	"
29	Acqua, Soda c., Ac. borico	4 "	5.65	14.89	79.46	10.80	26.17	63.03	"
30	Acqua, Soda c., 1-5-10. . .	16 "	5.60	14.32	80.08	13.79	35.94	50.27	"
31 a)	Acqua, Borace. . . . .	3 "	5.14	11.75	83.11	...	...	...	"
31 b)	" " . . . . .	4 "	5.07	11.72	83.21	12.86	29.18	57.96	"
32 a)	Acqua, Soda caustica e	24 ore	5.03	11.16	83.81	...	...	...	"
32 b)	Acido borico. . . . .	48 "	5.15	11.77	83.08	18.55	42.11	39.34	"
33	Acqua, Soda c., Borace. .	3 giorni	5.78	10.83	83.39	14.68	32.52	52.80	"
34 a)	" " " . .	3 "	6.95	11.42	81.63	...	...	...	"
34 b)	" " " . .	4 "	6.95	11.50	81.55	17.50	38.45	44.05	"
35	" " " . .	3 "	10.32	15.26	74.42	17.86	37.33	44.81	"
36	Acqua, Borace, Ac. borico	2 "	10.48	15.29	74.23	16.59	33.43	49.98	"
37 a)	Acqua, Soda caustica e	4 "	11.48	16.57	71.95	...	...	...	"
37 b)	Borace. . . . .	5 "	11.58	16.62	71.80	18.89	40.57	40.54	"
38 a)	" . . . . .	3 "	13.03	18.54	68.43	...	...	...	"
38 b)	" . . . . .	4 "	12.97	18.62	68.41	18.04	35.88	46.08	"
39	Acqua, Soda c., Ac. borico	4 "	13.17	18.57	68.26	...	...	...	"
40	Acqua, Soda c., Borace. .	2 "	13.10	18.65	68.25	...	...	...	"
41 a)	Acqua, Soda c., Ac. borico	3 "	13.36	18.90	67.74	...	...	...	"
41 b)	" " " . .	5 "	13.31	18.75	67.94	18.54	37.57	43.89	"
42 a)	Acqua, Soda caustica e	6 "	13.45	19.27	67.28	...	...	...	"
42 b)	Borace. . . . .	8 "	13.51	19.10	67.39	18.58	37.98	43.44	"

Segue: TABELLA II.

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione in termostato	Soluzione			Resto			Corpo di fondo
			Na <sub>2</sub> O %	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> %	H <sub>2</sub> O %	Na <sub>2</sub> O %	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> %	H <sub>2</sub> O %	
43	Acqua, Soda c., Ac. borico	2 giorni	14.06	19.77	66.17	...	...	...	
44 a)	Acqua, Soda caustica . . .	5 "	14.16	19.98	65.86	...	...	...	
44 b)	Borace . . . . .	7 "	14.12	19.97	65.91	17.62	33.85	48.53	1-2-5
45	" " "	4 "	16.03	22.61	61.36	...	...	...	
46 a)	Borace, Soda caustica e	3 "	15.89	22.47	61.64	...	...	...	
46 b)	Acqua . . . . .	5 "	16.13	23.05	60.82	19.17	37.66	43.17	"
47 a)	" " "	8 "	16.41	23.38	60.20	...	...	...	
47 b)	" " "	9 "	16.38	23.38	60.24	16.93	27.28	55.79	"
48 a)	Acqua, Soda caustica e	2 "	16.32	23.03	60.65	...	...	...	
48 b)	Acido borico . . . . .	10 "	16.44	23.45	60.11	18.99	36.16	44.85	"
49	" " "	3 "	17.20	23.87	58.93	...	...	...	
50	Acqua, Soda, Ac. tetraborico	10 "	18.49	25.94	65.57	20.55	39.91	39.54	"
51	Acqua, Soda c., Ac. borico	27 "	19.43	27.09	53.48	20.77	40.63	38.60	"
52	" " "	4 "	21.25	31.06	47.69	21.38	43.45	35.17	"
53 a)	" " "	12 "	22.39	32.85	44.76	...	...	...	
53 b)	" " "	13 "	22.21	32.49	45.30	22.36	45.45	32.19	"
54	Soda c., Acqua, Ac. borico	60 "	22.21	32.17	45.62	22.35	40.87	36.88	"

Come apparisce da questi risultati <sup>(1)</sup>, a 60° noi troviamo come fasi stabili dopo l'H<sup>3</sup> BO<sup>3</sup>, il pentaborato decaidrato 1-5-10, ed il diborato pentaidrato (borace con 5 molecole di acqua) 1-2-5.

Dobbiamo notare che il punto invariante tra il composto 1-5-10 e l'1-2-5 è dato dalla sola esperienza 20. Tentammo ripetutamente e per diversissime vie di riottenere, ma sempre il miscuglio posto in termostato finiva per divenire semisolido, in modo che era impossibile estrarre il campione della soluzione in quantità adatta per l'analisi. Stiamo ancora facendo esperienze in proposito e torneremo su questo in seguito quando completeremo il presente diagramma. Anche è difficilissimo ottenere il punto invariante tra il diborato (1-2-5) ed il metaborato il quale, come risulta dalle esperienze che abbiamo in corso, segue immediatamente al diborato.

<sup>(1)</sup> Il diagramma che si può ricavare colle solite regole grafiche da questi risultati verrà pubblicato insieme ai diagrammi delle esperienze che abbiamo in corso.

Per quanto riguarda la composizione delle fasi solide, essa risulta con molta precisione dalle linee di coniugazione le quali convergono con tutta regolarità nei punti rispondenti all'1-5-10 e all'1-2-5. Tuttavia, poichè le convergenti dell'1-5-10 formano un angolo assai acuto e come è noto, questo può sempre ingenerare dubbî sull'esattezza delle conclusioni, volemmo a maggior sicurezza preparare il composto 1-5-10, e analizzarlo dopo averlo separato dalla soluzione ed asciugato rapidamente tra carta da filtro.

I risultati che ottenemmo sono quelli delle esperienze 11 e 13 (Resto) i quali concordano bene con la composizione teorica dell'1-5-10 (vedi tabella I), dentro i limiti degli inevitabili errori sperimentali. Dalla esperienza 11 si ricava poi anche la composizione della soluzione del composto 1-5 nell'acqua pura; non così dalla esperienza 13 nella quale si aveva un eccesso dei due componenti in soluzione. Giova notare che appunto allo scopo di avere la composizione della soluzione la esperienza 11 venne condotta nel modo seguente: Si preparò il composto mischiando acido borico, soda caustica ed acqua in quantità pesate; poi si decantò la soluzione sovrastante, si lavò per decantazione il precipitato, si aggiunse acqua e si lasciò in termostato sino ad equilibrio; allora si analizzò la soluzione, e quindi, dopo separato ed asciugato, il corpo di fondo.

Invece, nella esperienza 13 non si lavò per decantazione; e solo si asportò il corpo di fondo, si asciugò e si analizzò.

I valori trovati colla esperienza per la composizione della soluzione dell'1-5 in acqua pura, concordano bene con quelli che si possono ricavare dal diagramma coi mezzi grafici consueti: da quei valori si ha che la solubilità di 1-5 nell'acqua pura a 60° è data da 39.92 di sale anidro in 100 p. di acqua.

Anche per l'1-2-5 si cercò sperimentalmente la composizione della sua soluzione in acqua pura partendo da borace puro ed acqua. I valori che si ottennero sono quelli della esperienza 31; ed essi pure concordano pienamente con quelli ricavabili con mezzi grafici. La solubilità del borace a 60° è data perciò da 20,18 di sale anidro in 100 parti di acqua (<sup>1</sup>).

Come abbiamo già detto, riferiremo prossimamente sulle esperienze attualmente in corso, dalla curva del diborato a quella della soda caustica.

(<sup>1</sup>) Horn und van Wagoner (Amer. Ch. Journ. 30, 347, an. 1903) danno per punto di trasformazione dell'1-2-10 in 1-2-5 circa 60°, e a circa 60° trovano 20 gr. di sale anidro in 100 grammi di acqua (confr. Landolt-Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen, 1905); Van't Hoff e Blasdale (Ber. Berl. Acad., 1905, pag. 1086) trovarono dilatometricamente, come punto di trasformazione, 60°.



Embriologia vegetale. — *Contribuzione all'embriologia delle Euphorbiaceae*. Nota del dott. E. CARANO <sup>(1)</sup>, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Le specie di *Euphorbiaceae* finora esaminate dal punto di vista embriologico si comportano in due modi differenti: le une, e sono la grande maggioranza, producono un gametofito a 8 nuclei, ordinati nell'interno del sacco embrionale nel modo tipico per le Angiosperme; le altre, ancora scarse in numero (*Euphorbia procera*, *E. palustris*, *E. virgata*, *Acalypha* sp.), producono invece un gametofito in cui i nuclei sono precisamente il doppio del caso ordinario, e cioè 16, così disposti da formare quattro triadi all'estremità dei due diametri longitudinale e trasversale del sacco, ed un nucleo secondario nel centro, risultante dalla fusione di quattro di essi.

Il Modilewski, al quale dobbiamo le prime osservazioni sulle *Euphorbiaceae* a gametofito 16-nucleato, esprimeva in uno dei suoi lavori <sup>(2)</sup> il parere che, estendendo le ricerche a nuove specie di questa famiglia, sarebbe stato possibile trovarne di quelle in cui fossero riuniti i caratteri dell'una e dell'altra delle due serie. Ed accennava brevemente ad *Euphorbia lucida*, riserbandosi però di sottoporla ad un più accurato esame prima di darne un giudizio definitivo.

A me sembra, però, che un caso siffatto non meriterebbe quell'interesse che potrebbe invece meritare un altro in cui si presentasse un comportamento intermedio fra le due serie. Ora questo caso è realizzato in *Poinsettia pulcherrima*, una specie da noi diffusamente coltivata per la vivacità del colore delle sue brattee, e che qualche anno fa è stata oggetto di studio da parte della signorina Donati <sup>(3)</sup>.

Il gametofito 16-nucleato nelle specie di *Euphorbia* suddette ripete la sua origine da ciò, che fra i quattro nuclei provenienti dalla divisione riduzionale della cellula madre delle megaspore, non si formano membrane; sicchè, non individualizzandosi quattro distinte megaspore, i nuclei di riduzione rimangono nella medesima cavità, e, per mezzo di due successive divisioni, ne producono in definitiva sedici.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel R. Istituto botanico di Roma.

<sup>(2)</sup> Modilewski I., *Ueber die anomale Embryosackentwicklung bei Euphorbia palustris L. und anderen Euphorbiaceen*. Berichte d. deutsch. bot. Gesellsch., Bd. XXIX, 1911, pag. 433.

<sup>(3)</sup> Donati G., *Ricerche embriologiche sulle Euphorbiaceae*. Annali di botanica, vol. XI, 1913.

In *Poinsettia pulcherrima* le cose procedono nel caso più frequente, secondo il modo tipico: vi è cioè un'unica cellula madre che, dividendosi riduzionalmente, genera quattro megaspore disposte in fila, tre delle quali vanno a male, ed una, l'inferiore, mediante tre divisioni dà luogo ad un gametofito 8-nucleato. Eccezionalmente però le megaspore, separate sempre da distinta parete e disposte piuttosto che in fila, in tetrade, germinano tutte e quattro, accennando così alla produzione di quattro sacchi embrionali distinti. In altri casi due megaspore germinano e due degenerano; in altri infine ne germinano tre; in una parola in *Poinsettia pulcherrima* vi è la tendenza a sviluppare più di una delle megaspore provenienti dalla medesima cellula madre.

Ora se noi stabiliamo un confronto fra il comportamento di *Euphorbia procera*, *palustris* etc., e quello della nostra pianta, vediamo che esiste una notevole corrispondenza: in entrambi i casi la cellula madre produce quattro nuclei di riduzione, i quali però, mentre nel primo caso, non essendo separati fra loro da pareti, danno origine ad un gametofito complessivo di 16 nuclei, nel secondo, essendo separati da pareti, generano quattro gametofiti distinti.

In un prossimo lavoro spero di dare maggiori dettagli in proposito, ed anche le figure illustrative.

Fisiologia vegetale. — *Sui procedimenti culturali suscettibili di provocare un aumento di zucchero negli steli del Mais.* Nota di O. MUNERATI e G. MEZZADROLI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Come è notorio, l'estrazione dello zucchero dal granturco è stata oggetto di numerosi studi e tentativi, che risalgono allo scorcio del secolo XVIII e inizio del secolo XIX (\*): nel 1839 Pallas affacciava poi nettamente il concetto di asportare le spiche immature come mezzo per accumulare una maggior quantità di zucchero nello stelo (<sup>1</sup>); nel 1879 Dureau parlava di una industria dello zucchero di granturco negli Stati Uniti (<sup>2</sup>).

(\*) È opportuno di ricordare che Berti Pichat rivendicava la priorità dell'idea all'italiano Mirabelli (*Istituzioni di agricoltura*, Torino, vol. IV). Si veggano inoltre altre notizie in Legier E., *Histoire des origines de la fabrication du sucre (Essais sur la fabrication du sirop de maïs)*, Paris 1901; Borgnino G. C., *Cenni storico-critici sulle origini dello zucchero in Italia*, Bologna 1910; Stohmann, *Handbuch der Zuckerfabrikation*, Berlin 1874.

(<sup>1</sup>) Compt. rend. Académie sciences, tome VII, pag. 692.

(<sup>2</sup>) Dureau G., *L'industrie du sucre de sorgho et de maïs aux Etats Unis*. Journal des fabricants de sucre, 26 mars 1879.

Nel 1906 il chimico americano F. L. Stewart di Murrysville (Pensilvania) brevettava come nuovo il procedimento culturale preconizzato da Pallas, di asportare cioè le spiche allorchè « l'amido granulare comincia a depositarsi nelle cariossidi, ossia quando la sostanza liquida contenuta nel seme comincia a prendere un aspetto opaco o lattescente » <sup>(1)</sup>. Più tardi lo Stewart completava il suo metodo suggerendo la concomitante asportazione della infiorescenza maschile.

La comunicazione dello Stewart doveva mettere evidentemente il campo industriale a rumore. Si parlava già di una Società costituitasi nella stessa Pensilvania, con un capitale di 10 milioni di dollari; di una prima grande fabbrica a Pittsburg <sup>(2)</sup> e di un'altra a Cuba. Per i climi caldi litoranei degli Stati Uniti e della Repubblica Argentina si pronosticavano due raccolti all'anno, con prodotti di 1300 e più quintali per ettaro di steli, e quindi con un ricavo, per ettaro, di 200 quintali di zucchero, 250 ettolitri di alcool e 250 quintali di cellulosa come sottoprodotto, cioè, per il solo zucchero, il quadruplo di quanto possano dare la barbabietola e la canna: la detronizzazione di queste culture era frattanto vaticinata come verificabile a non lunga scadenza, e nell'Europa il monopolio della produzione dello zucchero sarebbe passato dalle regioni del nord a quelle del sud.

Era naturale che in ogni paese, dove la cultura del granturco è praticata con successo, si ripetessero le prove, e che le riviste agronomiche e tecnico-industriali le andassero poi man mano segnalando. Le prime indagini in Europa, che a noi consti, furono compiute in Ungheria da G. Doby, con resultanze molto incoraggianti <sup>(3)</sup>; seguirono, sempre in Europa, le ricerche di E. Heckel a Marsiglia, pure con esito lusinghiero (l'A. si servì di una varietà di *mais* a grande sviluppo, il granturco gigante di Serbia, mentre più tardi Heckel considerava particolarmente degno di attenzione il granturco della Costa d'Avorio, che contiene normalmente il 10 % di saccarosio) <sup>(4)</sup>; da segnalarsi, ugualmente in Francia, le indagini di Ph. Vilmorin

<sup>(1)</sup> Stewart F. L., *Verfahren zur Erzeugung von Maiszucker*. Zeitschrift des Vereins der Deut. Zuckerindustrie, LVI Jahrg. (1906), pag. 567.

<sup>(2)</sup> *The utilization of maize plant (Indian Corn) for sugar, ecc.*, The American Sugar Industry, vol. XII (1910), n. 1, pag. 12.

<sup>(3)</sup> Doby G., *Zucker-, Cellulose und Alkoholfabrikation aus Mais*. Chemiker Zeitung, XXXIV Jahrg. (1910), n. 149, pag. 1330.

<sup>(4)</sup> Heckel E., *De l'influence de la castration mâle, femelle et totale sur la formation du sucre dans les tiges du maïs et du sorgho sucré* (Compt. rend. Acad. des sciences, tome 155, 1912, n. 16, pag. 686); *De la castration chez les végétaux, son influence sur le maïs et les sorghos au point de vue de la production du sucre* (Revue scientifique, LI (1913), n. 8, pag. 225); *Sur la castration mâle du maïs géant de Serbie* (Compt. rend. Académie des sciences, tome 159 (1914), I, pag. 16.

ed F. Levallois con deduzioni poco ottimistiche <sup>(1)</sup>: ad ogni modo gli A.A. troverebbero preferibile le varietà a seme zuccherino (*Z. M. saccharata*). Nelle Indie Olandesi N. Marx conduceva una serie di esperienze che lo portavano ad affermare come il succo ricavabile dal granturco, sia per il basso tenore in zucchero, sia per le sue impurità, non può valorizzarsi industrialmente <sup>(2)</sup>. Negli Stati Uniti quel Ministero di Agricoltura incaricava C. F. Clark di stabilire, con studî vari, la importanza del problema, e lo sperimentatore concludeva che, pur giungendo l'asportazione delle spiche immature ad aumentare di parecchio, particolarmente in alcune varietà, il contenuto zuccherino dello stelo, la qualità industriale del prodotto è molto al di sotto di quella della canna <sup>(3)</sup>.

Vanno infine citate le esperienze compiute su larga scala in Argentina da I. Bohle (che si servì, per le sue indagini di natura industriale, di una piccola fabbrica di zucchero a Tucuman), il quale A. concludeva un suo rapporto prevedendo « molto lontano ancora il giorno in cui si possa parlare di fabbricazione di zucchero di mais nell'Argentina » <sup>(4)</sup>.

\* \*

Spinti dal desiderio di portare un modesto e occasionale contributo allo studio del problema nella bassa valle Padana, dove il granturco trova delle condizioni particolarmente propizie di sviluppo, credemmo di intraprendere alcune indagini tanto nel 1913 quanto nel 1914.

### *Esperienze del 1913.*

Nel 1913 ponemmo a raffronto la facoltà saccarigena del granturco gigante di Serbia (suggerito da Heckel) e di una delle più reputate varietà, pure a grande sviluppo, della plaga padana, il « friulotto ».

Da un appezzamento uniforme, nel quale le due varietà erano state espressamente seminate ai primissimi di aprile, prelevammo, il 28 luglio, un campione per un primo saggio: e nello stesso giorno, a varii gruppi alterni di piante, destinate ad analisi successive, vennero asportate rispettivamente: le sole spiche (a grano immaturo): la sola infiorescenza maschile; le spiche e l'infiorescenza maschile insieme. Un altro gruppo si tenne evidentemente come testimonio.

<sup>(1)</sup> Vilmorin Ph. e Levallois F., *Contribution à l'histoire du sucre de maïs*, Revue scientifique LI (1913), I, 13, pag. 396.

<sup>(2)</sup> Marx N., *Sugar from corn*, The Louisiana Planter XLIX (1912), 14, pag. 225.

<sup>(3)</sup> Clark C. F., *Preliminary report on sugar production from maize*. U. S. Dept. of Agriculture, Bureau of Plant Industry, Circ. 111, febr. 1913.

<sup>(4)</sup> Bohle I., *Die Fabrikation von Rohrzucker aus Mais*. Die deutsche Zuckerindustrie. XXXIX Jahrg. (1914), n. 24, pag. 528.



Una lieve grandinata, sopraggiunta verso la metà di agosto, laciniava parzialmente il fogliame, così che l'esperienza veniva alquanto a perdere del suo valore.

Un'analisi fu però egualmente eseguita il 22 settembre. I risultati di essa figurano nel qui unito prospetto, nel quale, per brevità, sono tralasciate le indicazioni relative al peso delle piante, lunghezza degli steli, ecc.:

	GRANTURCO LOCALE « FRIULOTTO »					GRANTURCO GIGANTE DI SERBIA				
	Analisi il 28 luglio 1913 (all'inizio della prova)	Analisi il 22 settembre 1913				Analisi il 28 luglio 1913 (all'inizio della prova)	Analisi il 22 settembre 1913			
		Piante normali	Asporta- zione infiores- cenza maschile	Asporta- zione spiche	Asporta- zione spiche e infior. maschile		Piante normali	Asporta- zione infiores- cenza maschile	Asporta- zione spiche	Asporta- zione spiche e infior. maschile
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
Grado Brix nel sugo . . . .	8.5	6.2	7.8	11.5	11.70	6.95	8	6.7	11	12.1
Saccarosio . .	1.26	1.75	2.92	5.46	6.12	1.67	1.33	1.72	5.15	4.56
Purezza . . .	14.8	28.20	37.40	47.4	52.30	24.0	16.6	25.6	46.8	37.6
Riduttori . .	2.45	1.22	1.56	2	1.56	2.30	1.26	1.79	1.40	1.56
Sostanza secca % steli. . .	19.37	21.30	26	25.45	24.83	15.61	21.38	22.17	24.64	26.90
Ceneri % sost. secca . . . .	4.68	5.79	5.93	4.46	4.50	5.37	4.84	4.39	3.67	3.76
Ceneri % steli	0.91	1.22	1.54	1.13	1.11	0.84	1.03	1.41	0.90	1.01

Altre determinazioni, fatte successivamente per il solo saccarosio, palesarono una degradazione ancora più rapida. Anche nelle condizioni più propizie (asportazione delle spiche e della infiorescenza maschile) lo zucchero era mescolato a materiali eminentemente melassigeni, e tali quindi da togliere ogni valore industriale alle piante.

### *Esperienze del 1914.*

Nel 1914 operammo col solo granturco « friulotto », semplificando le prove per la parte analitica, ma complicando le combinazioni dei trattamenti, più per determinare come avrebbero reagito le piante, che non per un concetto di eventuale applicazione pratica. Ai gruppi, di cui alle prove del 1913 (asportazione spiche, asportazione infiorescenza maschile, asportazione tanto delle spiche quanto delle infiorescenze maschili), ne aggiungemmo altri costituiti: da piante nelle quali le spiche vennero asportate senza il loro rivestimento bratteale; da piante denudate completamente; da piante private di foglie, di infiorescenze maschili e dell'asse carnosio senza brattee. L'involucro bratteale, purchè la spica vi sia tolta per una incisione laterale, continua a mantenersi verde più o meno a lungo (sino a oltre 15 giorni).

Il 5 settembre si procedeva ad una analisi per il saccarosio, la sostanza secca e la purezza, e si ottenevano le seguenti cifre:

	Saccarosio	Sostanza secca	Purezza
a) Controllo . . . . .	6.49	8.6	75.4
b) Asportazione infiorescenze maschili . . . .	3.03	10.0	80.3
c) Asportazione infiorescenze maschili e spiche, compreso involucro bratteale . . . . .	9.67	12.9	74.9
d) Asportazione infiorescenze maschili e dell'asse carnoso della spica, lasciando l'involucro bratteale . . . . .	10.99	12.9	85.1
e) Denudamento completo . . . . .	1.41	3.3	42.8
f) Asportazione infiorescenze maschili, foglie e spiche senza brattee (denudamento completo lasciando solo involucro bratteale) . . . .	2.83	5.4	52.4

L'accumulo di saccarosio nello stelo fu molto superiore in confronto al 1913. Apparirebbe inoltre manifesta l'azione esercitata dall'involucro bratteale delle spiche come organo di assimilazione.

Per ricontrollare l'osservazione a questo ultimo riguardo, ed anche perchè, come dicevamo, una delle argomentazioni dei fautori della utilizzazione del *mais* quale pianta saccarifera è che di questa cultura possano farsi due raccolti all'anno, credemmo opportuno di eseguire anche una prova sul granturco in secondo raccolto.

Varietà sperimentata: un cinquantino, seminato nella seconda metà di luglio in un podere del prof. A. Piva di Rovigo. Asportazione delle spiche con l'involucro bratteale; delle spiche senza brattee; denudamento completo dello stelo ecc., ai primi di ottobre. Nella seconda metà dello stesso mese sopravvenivano dei fortissimi freddi e qualche brinata che provocarono un parziale essiccamento delle foglie, per cui forzatamente lo scopo della esperienza poteva ritenersi quasi frustrato. Ma poichè bastava mettere assieme solo alcune cifre comparative, facemmo egualmente, al 24 ottobre, una determinazione per il saccarosio e per la sostanza secca.

Ecco le cifre ottenute:

	Saccarosio	Sostanza secca
a) Controllo . . . . .	0.51	4.4
b) Asportazione infiorescenza maschile e spiche insieme con le brattee . . . . .	3.35	9.9
c) Asportazione infiorescenza maschile e spiche lasciando involucro bratteale . . . . .	3.73	10.5
d) Denudamento completo . . . . .	0.28	5.3
e) Denudamento completo lasciando involucro bratteale . . . . .	0.60	6.0

Come era da prevedersi, il titolo in saccarosio si palesò molto basso, ma si mantenne il parallelismo nella facoltà saccarigena dei singoli gruppi.

#### CONCLUSIONI.

Mentre ci proponiamo di continuare le nostre osservazioni negli anni venturi, possiamo sentirci autorizzati, dalle prove di un biennio, a formulare le seguenti conclusioni:

1°) Rimane ancora una volta confermato (se ve ne fosse stato bisogno) che con l'asportazione delle spiche immature (secondo il procedimento Pallas-Stewart) la pianta di granturco reagisce accumulando una quantità più o meno notevole di saccarosio nello stelo, e che l'aumento è maggiore quando si asporti contemporaneamente anche l'infiorescenza maschile. Una delle varietà considerata da Heckel come preferibile, il granturco gigante di Serbia, non ha mostrato di possedere una facoltà saccarigena superiore ad una delle varietà ad alto sviluppo (Friulotto) comunemente coltivate nella bassa valle Padana.

2°) Risulterebbe, come fatto nuovo, che, rimuovendo la spica senza asportare l'involucro bratteale, si eleva, limitatamente, la facoltà della pianta di accumulare zucchero. Per quanto però detta influenza favorevole possa trovare la sua facile spiegazione, è prudente di non considerarla ancora come definitivamente accertata.

3°) L'asportazione della infiorescenza maschile ad avvenuta fecondazione porta, anche in piante normali (cioè non private dello loro spiche), ad un aumento discreto di zucchero nello stelo: le nostre prove, compiute contemporaneamente a quelle di Heckel, avvalorano frattanto le resultanze di questi. La cimatura praticata per consuetudine in molte plaghe italiane e decisamente riprovata dagli agronomi, ma che Heckel troverebbe consigliabile per il mezzodi della Francia quale mezzo per aumentare il valore alimentare delle « canne » di granturco<sup>(1)</sup>, verrebbe ad essere così riabilitata: anche questa conclusione va data però con tutto il dovuto riserbo.

4°) La facilità con la quale, in plaghe normalmente non irrigabili come la bassa valle Padana, il granturco va soggetto ai danni del secco, e la caduta ricorrente della grandine mettono il granturco, come pianta zuccherifera, in condizioni di sostanziale inferiorità di fronte alla barbabietola; nè le varietà così dette cinquantine, da seminarsi in secondo raccolto dopo il frumento, sembrano offrire requisiti apprezzabili, anche per le eventualità sinistre cui possono andare soggette. Tanto valga per il *mais* considerato dal punto di vista culturale.

5°) Quanto alla utilizzazione del granturco per l'estrazione industriale dello zucchero, la presenza di rilevanti impurità melassigene, difficilmente eliminabili, dà alla pianta, almeno per le varietà di cui oggi si dispone.

<sup>(1)</sup> C. R. Ac. sciences, Tome 159, p. 16.

un valore pressochè negativo: opinione, questa, che affacciarono negli ultimi tempi autorevoli studiosi americani, i quali hanno creduto doveroso di attenuare gli entusiasmi e le troppe rosee profezie dei sostenitori delle idee dello Stewart (\*).

Patologia vegetale. — *Sulla bacteriosi del cetriolo in Italia*. Nota preliminare del dott. G. B. TRAVERSO <sup>(1)</sup>, presentata dal Socio G. CUBONI.

Nel maggio dello scorso anno il prof. C. Galimberti, direttore della Cattedra ambulante di agricoltura in Chioggia, inviava al prof. P. A. Saccardo, l'illustre micologo dell'Università di Padova, alcune foglie e frutti di cetriolo ammalati perchè vedesse se erano invasi da qualche fungo parassita, e faceva notare che la malattia si presentava con carattere epidemico e minacciava danni gravissimi. All'esame microscopico non fu possibile di rilevare la presenza di funghi parassiti che si dovessero ritenere causa della malattia, la quale invece sembrava doversi piuttosto attribuire ad infezione batterica od a disturbi gravi delle funzioni di assorbimento e nutrizione.

Dato l'interesse che il fenomeno presentava, tanto dal lato pratico quanto dal lato scientifico, perchè una tale malattia non si trovava descritta nei trattati di fitopatologia, ben volentieri aderii all'invito, fattomi dal

(\*) La questione sollevata al Congresso di chimica applicata di Washington-New York del 1912 in occasione della discussione di una comunicazione di D. Gibbs, *Production of alcohol and sugar from sap of the nipa palm* (Atti Congresso, vol. III, pag. 13), portava ad esplicite dichiarazioni di H. C. Prinsen Geerligs, antico direttore del Laboratorio dei fabbricanti di zucchero di Giava e noto fra i più competenti e autorevoli. Non ostante le affermazioni di Stewart, secondo le quali i succhi derivanti dagli steli di granturco si possono, con un processo speciale, facilmente depurare (brevetto Stewart in Zeit. des Vereins der Deutsche Zuckerindustrie, sept. 1912, pag. 1166), il Prinsen Geerligs informava che « la grande quantità di gomme e altre impurità sembrano impedire la cristallizzazione dello zucchero, per cui si ottiene una *massa cotta* della consistenza di un pudding » (Atti, vol. XXVII, pag. 60). Il Prinsen Geerligs ribadiva più tardi gli stessi concetti in uno dei più accreditati periodici della Germania (Die deutsche Zuckerindustrie, XXXVIII Jahrg., 1913, n. 43, pag. 933).

Aggiungasi che le fabbriche, di cui si annunciava l'impianto, non sarebbero esistite mai, perchè la Società, costituitasi a Pittsburg per lo sfruttamento dei brevetti Stewart, si sciolse senza aver affrontato il problema della fabbricazione dello zucchero (Sucrerie indigène et coloniale, tome LXXXIII, 1914, I, nn. 10 e sgg.). Si parla oggi nuovamente di quattro o cinque fabbriche in corso di costruzione nella Florida (Sucrerie indigène, 1914, I, pag. 299), per le quali non è tuttavia possibile di emettere un giudizio. Veggasi anche il pensiero pessimistico di Parow, dell'Istituto di fermentazione di Berlino (*Stärke-sirup und Stärkezucker aus Mais in Nordamerika*, Centr. für Zuckerindustrie, 1913-1914, n. 20, pag. 706).

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di patologia vegetale di Roma, febbraio 1915.



prof. Galimberti, di recarmi sul posto per fare le opportune osservazioni e raccogliere materiale per lo studio della malattia.

Debbo premettere, per spiegare l'allarme che la comparsa di questa malattia aveva suscitato, che la cultura del cetriolo viene praticata su larga scala nei dintorni di Chioggia, e precisamente in quella lingua di sabbie e dune costiere che si estende tra la punta di Sottomarina e la foce del Brenta, attorno a Brondolo. Riservandomi di fornire, nel lavoro definitivo, maggiori particolari intorno a questa cultura orticola, mi limito qui a far notare che la superficie coltivata a cetriolo nei pressi di Chioggia, secondo i dati gentilmente fornitimi dal prof. Galimberti, si può valutare a circa 250 ettari, con un prodotto medio, per ettaro, di 320 quintali. In complesso si può calcolare un prodotto di 75-85 mila quintali, che vengono quasi tutti esportati in Austria ed in Germania, e che rappresentano un valore di oltre quattro milioni di lire.

Nessuna grave malattia aveva colpito per l'addietro le culture dei cetrioli, le quali pertanto riuscivano assai remunerative. Solo nel 1913 si ebbe un forte attacco di *Gloeosporium lagenarium*, che deprezzò notevolmente buona parte del prodotto e portò di conseguenza perdite non indifferenti (<sup>1</sup>). Nel maggio del 1914 comparve la nuova malattia e si diffuse rapidamente destando serio allarme, il quale crebbe maggiormente nei primi giorni di giugno allorquando, in seguito ad una grandinata, il malanno accelerò la sua marcia invadendo parecchi orti che fino ad allora erano rimasti pressochè immuni.

Fu appunto verso la metà di giugno che io eseguii il sopralluogo, constatando che l'allarme dei coltivatori era purtroppo giustificato, poichè si trattava di una infezione epidemica gravissima. In tutti gli orti i danni della malattia erano evidenti; ed in quelli più gravemente colpiti, le aiuole presentavano un aspetto desolante perchè, invece di essere ricoperte dalla lussureggiante verzura che caratterizza le *cucurbitacee* in generale, apparivano quasi nude, con pochi ciuffi di verde, come se sopra vi fosse passata una fiammata devastatrice.

Esaminando da vicino le piante malate, potei constatare che le radici ed i giovani germogli non presentavano nulla di anormale, mentre i segni del male apparivano ben evidenti sulle foglie adulte e sui frutti, però con caratteri diversi.

Sulle foglie il primo sintomo del male si può osservare, come aveva acutamente notato il prof. Galimberti, esaminando le piante di buon mattino. Si vedono allora, sulla pagina inferiore delle foglie, delle aree irregolarmente tondeggianti, od angolose se limitate dalle nervature, larghe 2-5 mm.

(<sup>1</sup>) Vedasi un articolo del prof. C. Galimberti, in « La Venezia agricola » del 28 dicembre 1913.

circa, dalle quali trasuda un liquido incolore o quasi, al quale, a prima giunta, non si darebbe importanza. Ma in poche ore i segni della malattia diventano ben più appariscenti poichè, durante il giorno, questa sostanza liquida evapora e, come se dispiegasse una forte azione caustica, lascia al suo posto una macchia, dapprima giallognola, poi biancastra ed arida, in corrispondenza alla quale i tessuti muoiono e seccano completamente, diventando fragilissimi e producendo sulla foglia una caratteristica vaiolatura. In seguito a ciò, le foglie colpite perdono ben presto il loro turgore, si afflosciano e si raggrinzano; i tessuti morti si staccano e marciscono, e le foglie sono ridotte a brandelli informi; donde l'aspetto desolante che presenta un'aiuola fortemente colpita dal morbo.

Sui frutti invece, i quali possono venire colpiti dalla malattia in qualsiasi stadio del loro sviluppo, i fenomeni patologici, pur dimostrando identità di origine, sono notevolmente diversi, a motivo della diversa struttura anatomica dell'organo colpito. I frutti colpiti dall'infezione presentano dapprima piccole macchie livide, in corrispondenza alle quali, dopo qualche giorno, si osserva la fuoruscita di una sostanza vischiosa, densa, che a contatto dell'aria assume un colore ambrato e si indurisce formando delle masse gommosi dure, di forma sferoidale od irregolare, specialmente se più punti d'infezione sono vicini per modo che le loro escrescenze confluiscono insieme, che raggiungono normalmente un diametro di 1-4 mm., ma che possono talvolta anche arrivare ad un centimetro. Se i frutti sono colpiti dal male nei primi stadii del loro sviluppo, essi rimangono atrofici, deformati e si devono considerare senz'altro come perduti. Se invece i frutti sono colpiti quando hanno già raggiunto uno sviluppo più o meno considerevole, la loro polpa diviene molle, acquosa, partendo dai punti d'infezione e propagandosi questa marcescenza all'intorno, in modo da rendere il frutto inservibile, non solo, ma a sua volta centro d'infezione quando venga posto tra frutti sani.

Dalla osservazione dei caratteri coi quali si presentava la malattia, assumendo alla indagine intorno alle cause immediate di essa, era logico di concludere fin da principio che la malattia fosse di origine parassitaria.

Se infatti si fosse trattato di alterazioni e squilibri nelle funzioni di nutrizione della pianta, la malattia avrebbe dovuto colpire prima o l'apparato radicale o le più giovani parti dei cauli in via di accrescimento. Invece questi, come abbiamo detto, erano sani, ed i segni del male erano localizzati sulle foglie adulte e sui frutti. D'altra parte, non essendosi riscontrati nel primo esame funghi parassiti, e non avendo osservato negli orti visitati alcun insetto od altro animale cui si potesse attribuire l'origine del male, io fui indotto a concludere, colle dovute riserve, che doveva molto probabilmente trattarsi di infezione batterica o *bacteriosi* (<sup>1</sup>). Questa induzione tro-

(<sup>1</sup>) Vedasi articolo del prof. C. Galimberti in « La Venezia agricola » del 19 luglio 1914.

vava anche appoggio nel fatto, rilevato dal prof. Galimberti e confermato dai coltivatori presenti, che la prima comparsa del male si era verificata pressochè contemporaneamente in due orti distanti non meno di cinque chilometri l'uno dall'altro, ma appartenenti allo stesso coltivatore: facendo pensare al trasporto di germi per mezzo degli strumenti da lavoro.

Esaminando al microscopio il materiale raccolto, mi fu facile di mettere in evidenza la presenza di numerosi batteri nelle parti malate e nei prodotti gommosi di escrezione. Per venire però ad una conclusione sicura era necessario di procedere all'isolamento delle specie batteriche ed alla riproduzione artificiale della malattia. Mi accinsi perciò a tali ricerche nell'Istituto d'igiene della R. Università di Padova, col valido aiuto dell'amico prof. D. Carbone, al quale mi è grato di esprimere qui la mia viva riconoscenza. Servendomi dei frutti malati, che meglio delle foglie si prestavano alle diverse manipolazioni, riuscii ad isolare diverse specie di batteri, una delle quali molto più abbondante delle altre e quindi verosimilmente causa della malattia. Si trattava di un piccolo bacterio, mobile, fluorescente, non liquefacente la gelatina, del quale mi accingevo allo studio completo, morfologico e biologico, quando sopravvennero le vacanze estive prima, e poi il mio passaggio dall'Istituto botanico di Padova alla Stazione di patologia vegetale di Roma, che mi costrinsero a sospendere il lavoro.

Anche alcune prove di infezione artificiale, iniziate nell'Orto botanico di Padova, non arrivarono a risultati positivi, oltre che per possibili altre cause, per il fatto che, sopraggiunto in principio di luglio un periodo di clima asciutto, evidentemente contrario allo sviluppo del bacterio, anche l'infezione naturale si arrestò completamente, con grande sollievo dei coltivatori.

Noi mi sarei pertanto deciso a pubblicare queste notizie preliminari prima d'aver ripreso e completato lo studio, se a ciò non mi avessero indotto la convinzione di fare cosa utile per i fitopatologi, segnalando questa malattia, ed il fatto che proprio durante questi mesi la stessa malattia veniva studiata dal Burger <sup>(1)</sup> negli Stati Uniti d'America, e precisamente nello Stato di Florida, dove produce gravi danni da circa un quadriennio. Dalla lettura del lavoro del Burger e dall'esame delle figure che l'accompagnano, non sembra esservi dubbio che si tratti della stessa malattia, la quale sarebbe appunto dovuta ad un bacterio mobile riferibile al genere *Pseudomonas*. Ad ogni modo mi son fatto premura di chiedere materiale di confronto, che spero poter avere per completare, anche sotto questo rapporto, il mio studio.

Nel chiudere questa Nota preliminare, credo opportuno, data l'importanza pratica dell'argomento, aggiungere qualche cosa circa i possibili mezzi di lotta contro la malattia. Il prof. Galimberti, che si era occupato di fare

(<sup>1</sup>) Burger O. F., *Cucumber Rot* (Florida Agricult. Exper. Station, Bull. 121). Gainesville, 1914.

alcune esperienze con trattamenti a base di poltiglia bordolese dal 0,5 all'1 %, con polvere di zolfo e con zolfo ramato all' 1 %, non ebbe a rilevare, secondo quanto mi scrive, alcuna azione vantaggiosa da tali trattamenti. Secondo il Burger però, la poltiglia bordolese avrebbe sensibile efficacia purchè i trattamenti si comincino quando le piante sono molto giovani, con tre o quattro foglie soltanto e vengano ripetuti ogni dieci giorni con grande diligenza. Anche in questo campo, che dal punto di vista pratico è senza dubbio il più importante, mi propongo di fare ulteriori ricerche, se la malattia, come è probabile, farà la sua ricomparsa nella prossima primavera; ed intorno ad esse riferirò nel lavoro definitivo.

**Biologia.** — *Contributo alla conoscenza dello sviluppo embrionale e post-embrionale degli Scopelini Müller (Saurus griseus Lowe, Chlorophthalmus Agassizii Bp., Aulopus filamentosus Cuv. (¹)).* Nota preventiva di LUIGI SANZO, presentata dal Socio B. GRASSI.

#### I. *Saurus griseus* Lowe.

Dietro tentativi seguiti per più di un biennio, sono riuscito ad operare, in questa specie, con esito positivo la fecondazione artificiale. Per quanto io sappia, è questo il primo esempio di fecondazione artificiale nel gruppo degli Scopelidi.

Le uova fecondate sono galleggianti, sferiche, alquanto opaco-bianchicce per la struttura della capsula ricoverta da un reticolo regolare a maglie esagonali, come nelle uova di *Uranoscopus* descritte dal prof. Raffaele.

Mancano di gocce oleose e di spazio perivitellino. Il loro diametro oscilla da mm. 1,10 a mm. 1,35.

Le medesime uova ho potuto identificare tra il materiale di uova galleggianti pescate nelle acque dello Stretto di Messina nei mesi da giugno a novembre.

Il periodo d'incubazione dura 4 giorni e mezzo.

La larva, appena sgusciata, misura dai 4 ai 4.5 mm. È caratteristica per la presenza di quattro paia di macchie nere disposte, quasi ad uguale distanza, tra le pettorali e l'ano. A metà della coda un quinto paio di macchie, egualmente in nero, ed un sesto all'estremo del tronco.

(¹) Dall'Istituto centrale di Biologia marina in Messina del R. Comitato talassografico italiano.



La *pinna primordiale* s'inizia dorsalmente dal capo e gira attorno al corpo sino all'ano, restringendosi leggermente in avanti dell'estremo del tronco caudale.

Sono presenti piccole e membranose *pettorali*.

Si contano 58-60 segmenti: 39-40 addominali, e 19-20 caudali.

La *corda*, come nelle larve di Clupeidi, è ampia e formata da grossi segmenti posti l'uno dietro l'altro.

L'*occhio* è ovale. Ha il maggior diametro leggermente inclinato, con la sua porzione superiore in avanti, sull'asse longitudinale del corpo. Il tapeto corioideo è già formato, e l'occhio risplende di riflessi metallici.

Quasi attigue ed assai sviluppate sono le *vescicole auditive*, ciascuna con evidente rigonfiamento ampollare.

Lateralmente sul tronco si contano 7 *bocciuoli sensitivi*: 6 dal capo all'ano, e 1 sulla porzione caudale.

Il *sacco vitellino* è disteso dal capo sino a livello della 3ª coppia di macchie ventrali; è alquanto rigonfio in avanti.

La *bocca* non è ancora aperta, ma lo diviene nello stesso primo giorno dalla schiusa.

Sono formati lo *scheletro branchiale cartilagineo*, la *cartilagine di Meckel* e le *cartilagini basali del cranio*.

L'*intestino* corre diritto all'indietro, piegando ventralmente ad angolo ottuso poco prima della sua apertura anale. Al tratto di ripiegamento sta addossata la *vescica urinaria*.

Ho potuto allevare le larve fino al 5º giorno dalla schiusa; il materiale vitellino s'è esaurito nei primi tre giorni.

Oltre alle uova ed a le larve ottenute con la fecondazione artificiale, ho potuto, con la pesca nello Stretto rinvenire una serie di stadi ancora larvali fino a quelli di giovanissimi *Sauri*, la quale si connette alle larve ottenute dalle uova in cultura. Così come ho messo in rilievo per altri *Scopelidi*, anche nello sviluppo di questa specie si ha un periodo di accrescimento larvale, a cui segue un periodo contraddistinto da riduzione, in grandezza, dell'animale.

Tutta la serie è caratteristica per la presenza di sei paia di macchie peritoneali; delle quali, quattro paia corrispondono a quelle della larva appena sgusciata, e due sono di nuova formazione. Con l'ulteriore sviluppo larvale tali macchie si rendono meno visibili, mentre si accenna del pigmento lungo la parte laterale del corpo. Nelle semilarve e giovani *Sauri*, mentre non appare più il pigmento ventrale, quello laterale ha pigliato il predominio, ed è entrato in iscena quello dorsale. Queste modificazioni coincidono, e molto probabilmente vi hanno rapporti, col cambiamento di *habitat* dell'animale. Le larve infatti sono pelagiche e vengono sotto luce della lampadara; le semilarve in riduzione avanzata capitano invece insieme coi giovani *Saurus* nella pesca con reti a strascico.

Con tale cambiamento di *habitat* è da pigliare in considerazione il mutamento di forma del corpo, di posizione degli occhi, di sviluppo correlativo delle pinne. Il capo ed il tronco, alquanto compressi lateralmente nelle larve pelagiche, divengono, nelle semilarve e stadi giovanili, schiacciato il primo, e subconico il secondo; gli occhi; da una posizione latero-ventrale, ruotano in modo da guardare latero-dorsalmente: e delle pinne le ventrali, sebbene apparse più tardivamente delle altre, assumono presto proporzioni più sviluppate e raggiungono, alla fine del periodo di riduzione in grandezza dell'animale, quella forma, grandezza e, pei numerosi segmenti articolati dei raggi, quella pieghevolezza confacenti alla vita di fondo alla quale l'animale è passato.

## II. *Chlorophthalmus Agassizii* Bp.

Di questa specie ho potuto identificare tutta la serie di sviluppo larvale dai 4.5 mm. fino ai 47 mm. È caratteristica di tutta la serie una grande macchia in nero, sulla vòlta peritoneale corrispondentemente alle basi delle pettorali, ed una piccolissima macchia, anch'essa in nero, all'estremo caudale. Tutto il resto del corpo si mostra completamente privo di pigmento. Il capo, negli esemplari più piccoli, è assai tozzo in rispetto allo spessore del tronco che è assai compresso lateralmente. Tale rapporto con lo sviluppo, si va attenuando, di maniera che nell'esemplare, più sviluppato, di 47 mm., si passa insensibilmente dallo spessore del capo a quello del tronco che è divenuto subcilindrico.

L'occhio presenta analoghe modificazioni di posizione che in *Saurus griseus*.

In esemplari sugli 8 mm. la pinna primordiale è ancora ampia. Mancano gli abbozzi della dorsale e dell'anale. All'estremo posteriore della parte assiale del corpo *accenna* a piegare dorsalmente. (Il ripiegamento in alto è assai più tardivo in un *Paralepino*, come illustrerò in una prossima pubblicazione)

Su un ispessimento mesodermico ipocordale che in altezza occupa assai più della metà della pinna primordiale si mostrano già abbozzati quattro ipurali. In esemplari sugli 11.5 mm. la caudale è definitivamente differenziata. Allo stesso stadio, si mostrano gli abbozzi per la pinna anale. Il numero definitivo dei raggi si coglie in esemplari oltre ai 20 mm. L'apparizione della dorsale è, come in *Saurus lacerta* e *Chauliodus Sloani*, tardiva e posteriore a quella dell'anale. I primi accenni si hanno in stadi sui 15 mm., mentre a questo stadio l'adiposa ha la sua forma. Il numero di raggi si completa in esemplari dai 21 ai 22 mm. Pettorali membranose e, finamente striate, ed arrotondate, si hanno ancora in stadii sui 13-14 mm. Su esemplari di 16 mm. si mostrano abbozzati 13-14 raggi. Conto ancora lo stesso numero

di raggi a mm. 21.65 e 15-16, numero definitivo, in stadi sui 30 mm. Nello sviluppo ulteriore le pinne si allungano di molto, sino a raggiungere l'estremo delle ventrali. Queste sono piccolissime in stadi sui 16 mm.; presentano il numero definitivo di raggi in esemplari sui 21 mm.

Tutta la serie dai 4,5 ai 47 mm. è da riferirsi allo sviluppo larvale. Ritengo che anche per questa specie intervenga un periodo di riduzione in grandezza. Vi è un forte sbalzo tra l'esemplare di mm. 47, quasi completamente sprovvisto di pigmento, e i più giovani *Clorophthalmus* che ho potuto raccogliere, con superficie del corpo ricca di pigmento — specie latero-dorsalmente — che preaccenna a quella definitiva dell'adulto. Tale sbalzo, assai verosimilmente, è occupato dal periodo riduttivo i cui rappresentanti per le specie da me studiate, sono relativamente molto rari, quando non siano rarissimi.

### III. *Aulopus filamentosus* Cuv.

Anche di questa specie, assai affine alla precedente, ho potuto stabilire degli stadi larvali, rarissimi nel materiale larvale di Scopelidi rinvenute in questo Stretto.

Possego, in tutto, tre esemplari, rispettivamente della lunghezza di mm. 11.50, 32.70, 40.50.

I caratteri offerti dalle larve non lasciano dubbio veruno che esse appartengano allo sviluppo dell'*Aulopus*, e che la *Pelopsia Scillae*, sotto la quale denominazione il Facciola descrisse un esemplare sui 35 mm., debba essere ora considerata quale uno stadio larvale dell'*Aulopus filamentosus*.

La larva più piccola è caratteristica per l'ampiezza e la forma delle pettorali. Queste oltrepassano l'origine dell'anale, e contano 14 grossi raggi. La membrana interradiale presenta, alla parte distale fra un estremo e l'altro di due raggi consecutivi, un'insenatura il cui bordo è pervaso da numerosi e piccoli elementi in nero. Sono altresì caratteristiche 13 macchie sulla volta peritoneale, le quali si mostrano ridotte a 10 nella larva di mm. 32.70, ed a 6 in quella di mm. 40.50.

Nella larva più piccola persiste la pinna primordiale, ed è definitivamente abbozzata la caudale con 19 grandi raggi. Essa, così come negli altri due esemplari, è alquanto rialzata in alto sull'asse del corpo. Si contano 8 pezzi ipurali. Sul lembo dorsale e sul ventrale della pinna primordiale si mostrano rispettivamente abbozzate le pinne dorsale ed anale. Si contano 50 segmenti, che è il numero di vertebre da me riscontrato nell'adulto. La corda è ampia, con elementi stivati tra loro. Il mascellare inferiore sporge alquanto in avanti dal superiore. L'intestino ha un ampio lume, e termina un certo tratto in avanti dall'anale.

Nell'esemplare di mm. 32.70 è scomparsa la pinna primordiale e sono già formate la dorsale con 15 raggi, l'anale con 11 e le ventrali con 9.

È comparsa una piccola adiposa. Le pettorali si mantengono ancora ampie. Gli stessi caratteri sono da ripetersi per l'esemplare di mm. 40.50. È da notare l'enorme sviluppo dei primi raggi della dorsale, carattere riscontrabile nel maschio dell'adulto.

I tre esemplari, per le stesse ragioni dette per la specie precedente, ritengo appartenenti al periodo larvale. Non sarà improbabile rinvenire un giorno o l'altro, qualche stadio in riduzione.

**Parassitologia.** — *Ricerche sulle tignuole della vite.* Nota del dott. MARIO TOPI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Benchè assorbito quasi interamente da altre occupazioni, ho potuto fare anche quest'anno alcune osservazioni biologiche sulle tignuole della vite, ed alcune esperienze sulla efficacia dei trattamenti insetticidi, di cui qui brevemente riferisco.

\* \* \*

In primavera avevamo 32 fasce di stoffa, che, essendo state applicate, durante l'estate precedente, alle viti perchè servissero di rifugio alle larve (metodo Catoni), racchiudevano 56 bozzoletti con crisalidi di tignuole. Dalle crisalidi si ottennero 32 *Endemis*, 2 sole *Conchylis* ed 8 imenotteri parassiti.

Queste cifre concordano in gran parte con quelle ottenute, nelle identiche condizioni, l'anno scorso: la stessa percentuale di *Conchylis* sul numero totale di farfalle schiuse (poco più del 5 %); quasi la stessa percentuale di crisalidi non schiuse, probabilmente parassitizzate da funghi o batteri (21 % nel 1913; 25 % nel 1914); minore è stata invece quest'anno la percentuale degli imenotteri parassiti (14 %, invece di 22 %). Non solo, ma si è anche osservato che gli imenotteri parassiti sono schiusi quando già erano uscite più della metà delle farfalle. Lo stesso è avvenuto in capsula, ove tenevamo una ventina di crisalidi: imenotteri parassiti sono usciti da due crisalidi di tignuola, quando già tutte le farfalle erano schiuse da diversi giorni dalle crisalidi sane. Questo fatto è in contraddizione con quanto si ritiene ed avviene di regola: che cioè i parassiti compaiano assai più presto delle farfalle.

Dal lato pratico della lotta, da ciò consegue che, se sono state collocate in casse con aperture reticolate le corteccie di viti, le punte delle canne che hanno servito alla impalatura delle viti o gli stracci appositamente applicati alle viti, conviene conservare queste casse fin molto tardi e non distruggere il contenuto appena compaiano le prime farfalle, come spesso si consiglia; e che ritardare lo scortecciamento per lasciar schiudere i parassiti è una pratica talvolta non sufficiente allo scopo.



In primavera, in estate ed in autunno ho ripetute le prove di cattura delle farfalle nell'acqua melassata in fermentazione, per seguire la schiusa e per constatare o meno la presenza, nella località, di una terza generazione.

Furono posti quattro vasi pieni di liquido in fermentazione in una vigna molto attaccata dalle tignuole; tre erano ravvicinati tra loro ad una distanza di una diecina di metri l'uno dall'altro; l'ultimo (il II) era più distante ed in posizione più soleggiata.

Le catture in primavera sono state molto scarse (15 farfalle in tutto: 12 *Eudemis* e 3 *Conchylis*) e distribuite in un numero grande di giorni: dal 12 maggio al 1° giugno. Non vi è stato un periodo massimo di schiusa, essendosene catturate giornalmente da 0 a 3.

In estate le catture degli adulti della prima generazione dell'anno sono state discretamente numerose, come vedesi dalla tabella. Inoltre esse segnano due massimi, l'uno dal 15 al 18 luglio, l'altro dal 24 al 30; questi massimi ed in generale tutto l'andamento delle catture — e quindi, probabilmente, quello della schiusa — concordano in modo straordinario con quelli ottenuti, con lo stesso sistema, lo scorso anno. Per far notare questa concordanza, si riportano, nell'ultima colonna della tabella, le cifre totali dello scorso anno:

GIORNI	Vaso I	Vaso II	Vaso III	Vaso IV	<i>Conchylis</i>	<i>Eudemis</i>	Totale 1914	Totale 1913
6-9 luglio	—	—	2	—	—	2	2	—
9-12 "	—	2	2	2	1	5	6	1
12-15 "	3	—	—	3	2	4	6	8
15-18 "	10	—	8	9	6	21	27	10
18-21 "	4	—	7	—	2	9	11	8
21-24 "	2	—	6	5	—	13	13	8
24-27 "	17	1	7	13	1	37	38	30
27-30 "	9	1	6	10	—	26	26	13
30 luglio - 2 agosto	3	1	—	4	—	8	8	3
2-5 agosto	4	2	—	—	—	6	6	2
TOTALI . . .	52	7	38	46	12	131	143	83

In autunno si posero nuovamente, nella stessa località, i vasi col liquido in fermentazione, ma non si catturò nessuna farfalla.

Restano così determinati, per la località presa in esame (Alice Bel Colle) e con osservazioni, in gran parte, di un biennio, i seguenti punti:

1°) l'assoluta predominanza della *Eudemis* sulla *Conchylis*;

2°) la schiusura degli adulti si protrae, in primavera, per circa 20 giorni, ed in estate per circa 30;

3°) le schiusure primaverili procedono, dall'inizio alla fine, quasi con la stessa regolarità, mentre le estive diventano numerose nella seconda quindicina di luglio;

4°) vi sono solamente due generazioni annuali: gli adulti della seconda schiudono alla primavera successiva.

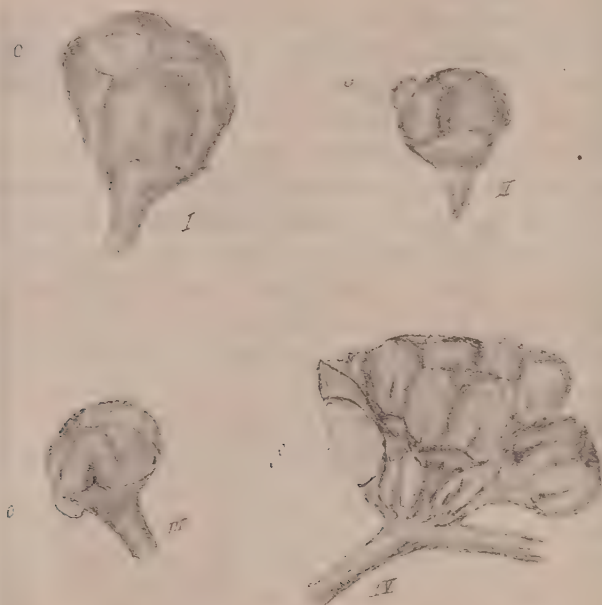


FIG. 1. — Uova di *Polychrosis (Eudemis) botrana* della prima generazione (var. ingranditi)

Durante lo sfarfallamento, si può assistere, verso il crepuscolo, alla deposizione delle uova. In maggio abbiamo potuto seguire quella della *Eudemis*. La femmina, che si appresta alla deposizione, ha volo fermo e sicuro presso i grappoli fiorali, su cui si posa senza incertezze. Dopo la deposizione di un uovo, si rialza a volo, dirigendosi verso un altro grappolo o tornando sullo stesso. L'uovo è deposto in un punto qualsiasi del boccio florale o sulle brattee; ne abbiamo appunto veduti verso la sommità (fig. 1, I) e sui lati dei petali (fig. 1, II), sulla loro base d'inserzione (fig. 1, III) e sulle brattee (fig. 1, IV). In cattività si ottengono su qualunque parte della pianta.

L'uovo ha l'aspetto di una piccolissima lente, appiccicata per una delle due faccie; il contorno è leggermente ellittico; ha un colore grigio chiaro trasparente, è finamente reticolato ed ha dei riflessi iridati che lo hanno fatto rassomigliare ad una piccola opale.

Il volo dei maschi è invece più rapido, meno fisso, ed essi si sottraggono in brevissimo tempo alla vista.

Nella località dove facevamo le osservazioni, la fioritura ha cominciato, nelle posizioni ben soleggiate, ai primi di giugno.

Le larve di *Conchylis* hanno raggiunto la maturità più presto di quelle di *Eudemis*, come si poteva verificare verso il 20 giugno; una conferma l'abbiamo avuta con le catture delle farfalle: infatti, dopo il 20 luglio non abbiamo preso che una sola *Conchylis*.

\* \* \*

Come insetticidi contro le larve abbiamo usati l'arseniato di piombo Swift allo 0,8 % in primavera, e l'estratto di tabacco al 2,5 % in estate, mescolati alla poltiglia bordolese, irrorando con getto ad intermittenza, avendo cura di bagnare specialmente i grappoli.

In una vigna abbiamo trattato alternativamente un filare sì e l'altro no, facendo due trattametti primaverili con l'arseniato di piombo, il 28 maggio ed il 13 giugno; ed un trattamento estivo con l'estratto di tabacco, il 3 agosto. Forse, data la schiusura delle farfalle, sarebbe stato conveniente anticipare di qualche giorno tutti questi trattamenti. In questa vigna si coltivavano principalmente i vitigni *lambrusca* e *moscato*.

In un'altra vigna, in cui si coltivava principalmente il *barbèra*, si fece un solo trattamento il 5 agosto con l'estratto di tabacco, usando lo stesso sistema per il controllo.

Osservando in estate il raccolto e giudicando all'ingrosso, a colpo d'occhio non si sarebbe potuto riconoscere, pel migliore stato dell'uva, quali fossero i filari trattati e quali i non trattati. Tuttavia un minuto esame degli acini ci ha permesso di notare una indubbia efficacia conseguita coi trattamenti.

Nella prima vigna scegliemmo 4 viti di *moscato* (2 trattate e 2 non trattate) e 2 di *lambrusca* (l'una trattata e l'altra no), che avessero rispettivamente lo stesso numero di grappoli. L'esame degli acini ci ha fatto riconoscere, nell'uva delle due piante di *moscato* trattate, 343 acini guasti od erosi; in quella non trattata, 547; nell'uva della pianta di *lambrusca* trattata, 248; in quella non trattata, 290.

Nell'altra vigna di *barbèra* scegliemmo pure 2 viti (l'una trattata e l'altra no), aventi 36 grappoli ognuna. Nell'uva della pianta trattata vi erano 442 acini guasti od erosi, ed in quella non trattata 759.

Con questo sistema di controllo non abbiamo potuto tener conto quasi esclusivamente che dei benefici del trattamento estivo; per le ragioni già dette, nè in primavera nè in autunno abbiamo potuto fare altri controlli.

Ci sembra tuttavia che, anche entro questi limiti, i risultati ottenuti, specialmente col *barbèra* ed il *moscato*, siano oltremodo incoraggianti per il trattamento delle vigne con insetticidi contro le tignuole.

Chimica. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue.*  
II. *Mobilità dell'ione  $\text{HCO}_3'$  alla temperatura 18° C.* Nota dei dottori E. D'AGOSTINO e G. QUAGLIARIELLO, presentata dal Corrisp. FILIPPO BORTAZZI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* III: *Azione del rene sugli aminoacidi aggiunti al sangue od al liquido di Ringer circolante.* Nota di CAMILLO ARTOM, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Le ricerche di Folin e Denis <sup>(1)</sup>, e più specialmente quelle di van Slyke e Meyer <sup>(2)</sup>, hanno dimostrato che gli aminoacidi introdotti in circolo scompaiono rapidamente, e nella loro quasi totalità, dal sangue. Si è quindi affacciato il problema di determinare l'azione dei singoli tessuti in questo complesso fenomeno; al quale scopo il prof. Lombroso ha iniziato una serie di ricerche sistematiche sul comportamento dei vari tessuti rispetto agli aminoacidi in essi circolanti. Io ho, per suo consiglio, proseguito, sperimentando col rene sottoposto a circolazione artificiale, le indagini già da lui compiute sul tessuto muscolare <sup>(3)</sup>.

Van Slyke e Meyer <sup>(4)</sup>, saggiando il contenuto di aminoacidi negli organi di cani a cui si era iniettata una soluzione di aminoacidi, osservavano che il rene è, insieme col fegato, l'organo capace di assorbire in maggior quantità gli aminoacidi dal sangue. Così in una esperienza il rene aveva accumulato, per 100 gr. di tessuto, 60 mmgr. di N amminico, mentre il muscolo per lo stesso peso di sostanza non ne aveva assorbito che 27 mmgr. Aumentando la quantità di aminoacidi iniettati, si

<sup>(1)</sup> Journ. of biol. chem. XI, pag. 87, an. 1912.

<sup>(2)</sup> Journ. of biol. chem. XII, pag. 399, an. 1912.

<sup>(3)</sup> Rendiconti Accad. Lincei, vol. XXIV, serie 5<sup>a</sup>, 1° sem., fasc. 1° e 2°.

<sup>(4)</sup> Journ. of biol. chem. XVI, pag. 197, an. 1913.



può anche produrre un accumulo tre volte maggiore. L'N aminico accumulato scompare in seguito dal rene, meno presto però che dal fegato il quale, distruggendo rapidamente gli aminoacidi assorbiti, verrebbe a sottrarli continuamente dalla circolazione e quindi dai tessuti. Solo quando gli aminoacidi penetrino troppo rapidamente in circolo, o quando per condizioni patologiche il fegato sia insufficiente a compiere la sua funzione normale, il rene gli viene in aiuto eliminando inalterato per le urine l'eccesso di aminoacidi.

Lanzillotta (<sup>1</sup>) ha fatto circolare nel rene, per 6-8 ore con l'apparecchio di Aducco, soluzione di Ringer cui aveva aggiunto un aminoacido (glicocollo-alanina-tirosina-acido asparaginic) nella concentrazione 3-4 ‰. Otteneva in queste condizioni un prodotto di secrezione nel quale gli aminoacidi si trovavano press'a poco nella stessa concentrazione che nel liquido di circolazione: sommando il contenuto in aminoacidi di questi due liquidi e confrontandolo con la quantità di aminoacido fatta circolare attraverso il rene, si nota una diminuzione, pari a 0,8-7 ‰ per la glicocollo, 5,3-19,9 ‰ per l'alanina, 7,2 ‰ per la tirosina. Solo con l'acido asparaginic non si aveva alcuna diminuzione, anzi si notava a volte un aumento del contenuto di aminoacidi.

Questo reperto l'A. spiega con una idrolisi delle proteine del tessuto per opera dell'acido; infatti, ripetendo l'esperimento con acido asparaginic neutralizzato, ottenne una diminuzione pari a circa il 10 ‰ dell'aminoacido posto in circolazione.

Questa scomparsa di aminoacidi dal liquido di circolazione è attribuita dal Lanzillotta a un processo di disaminazione chimica per opera degli epiteli renali. Il fenomeno, osservato dal van Slyke, della singolare attitudine del rene ad accumulare aminoacidi, sottraendoli dal sangue, potrebbe veramente spiegare, senza dover ricorrere all'ipotesi della disaminazione, una parte dei risultati esposti dal Lanzillotta, ma non tutti. Egli avrebbe infatti in alcune esperienze ottenuto una scomparsa di aminoacidi notevolmente superiore a quella capacità di saturazione che possiamo arguire dalle ricerche di van Slyke. Si può però sempre obiettare che nelle ricerche con circolazione artificiale di un organo isolato è possibile che l'accumulo sia ancora più rilevante, venendo a mancare quello scambio di aminoacidi dal rene al fegato, cui van Slyke attribuisce importanza fondamentale nel fenomeno della scomparsa, dagli organi, degli aminoacidi accumulati.

\*  
\* \*

Per contribuire alla risoluzione di tali quesiti, ho dosato gli aminoacidi del liquido e dell'organo prima e dopo la circolazione; e ho anche ri-

(<sup>1</sup>) Arch. di Fisiol. XII, 429, an 1914.

cercato se ad una eventuale diminuzione di aminoacidi del liquido corrispondesse una produzione, sia nell'organo e sia nel liquido, di ammoniaca che stesse ad indicare un processo di combustione a spese degli aminoacidi scomparsi. Allo stesso scopo ho in alcuni casi esteso la ricerca anche all'acetone. Come liquido di circolazione ho usato in una prima serie di esperienze il liquido di Ringer, in una seconda il sangue, al fine di poter chiarire se e in quale misura la sostituzione del sangue con soluzione fisiologica modifici (come fu osservato pel tessuto muscolare) i processi metabolici del rene sopravvivente rispetto agli aminoacidi.

A cani appena uccisi per dissanguamento dalla carotide, asportavo il rene e lo ponevo nell'apparecchio di Lind ove facevo circolare o il liquido di Ringer o il sangue defibrinato dello stesso animale, dopo di avervi aggiunto una certa quantità di aminoacido (4 gr. per 500 cm.<sup>3</sup> di liquido all'incirca). La durata di ciascun esperimento era varia a seconda della velocità di circolazione (che, quando si usava il sangue, era sempre molto piccola) ma non oltrepassava mai le ore 3-3  $\frac{1}{2}$ . Il prodotto di secrezione, che, di regola, era in quantità notevole solo quando il liquido circolante era soluzione fisiologica, alla fine dell'esperimento veniva mescolato col liquido refluo dalla vena. Il rene aumentava di peso nel corso della circolazione, e l'aumento di peso, piccolo quando si circolava con sangue, relativamente rilevante quando si adoperava liquido di Ringer, veniva assunto come indice della quantità di liquido di circolazione che rimaneva nell'organo, e che perciò doveva sottrarsi dalla quantità iniziale di liquido nei calcoli sopra il liquido residuante dalla circolazione.

Il dosaggio degli aminoacidi era eseguito col metodo del Sørensen, dopo eliminazione dell'ammoniaca e, se si operava sul sangue, precipitazione delle sostanze proteiche con ferro colloidale. In qualche caso ho controllato i risultati della formoltitolazione col van Slyke. Il dosaggio dell'ammoniaca era fatto col metodo della corrente d'aria del Folin; quello dell'acetone (eseguito solo in alcuni casi) col metodo Messinger-Huppert.

Per l'organo, i dosaggi si eseguivano sugli estratti, ottenuti con alcool e acqua bollente secondo le istruzioni del van Slyke.

Tralascio per brevità i protocolli delle singole esperienze; e mi limito a riunire in due tabelle i dati principali delle due serie di circolazioni, con liquido di Ringer e con sangue rispettivamente.

Nelle tabelle tengo nota:

1°) della quantità di liquido posto nell'apparecchio in principio dell'esperimento;

2°) della quantità di aminoacidi aggiunti al liquido stesso, espressa in grammi;

3°) della pressione (in centimetri di Hg), della velocità (centimetri cubi effluenti dalla vena in 1') e della durata della circolazione.

4°) della quantità di aminoacido (rappresentata dai centimetri cubi di  $\text{Na OH } 1/10^{\circ}$  occorrenti per la formoltitolazione) presente complessivamente nel liquido prima e dopo la circolazione, e della diminuzione corrispondente in cifra assoluta e percentuale rispetto alla quantità di aminoacido del liquido prima della circolazione;

5°) della quantità di aminoacidi del rene normale e di quello circolato, e della differenza relativa;

6°) degli aminoacidi scomparsi (sia dal liquido, sia dall'organo) in cifra assoluta e percentuale;

7°) dell'  $\text{NH}_3$  del liquido (espressa in  $\text{cm.}^3$  di  $\text{H}_2\text{SO}_4 \ 1/50$  normale) prima e dopo circolazione, e della differenza relativa;

8°) dell'  $\text{NH}_3$  dell'organo normale e di quello circolato e della differenza relativa;

9°) dell'  $\text{NH}_3$  eventualmente prodottasi nella circolazione, tenuto conto delle variazioni della stessa nel liquido e nell'organo;

10°) del peso del rene prima e dopo circolazione, e dell'aumento relativo.

Infine nelle osservazioni notai la quantità di liquido raccolto dall'uretere, e i risultati dei dosaggi (non sempre eseguiti) dell'acetone.

## CIRCOLAZIONI CON SOLUZIONE FISIOLGICA

Esperimento	Quantità di liquido cm. <sup>3</sup>	Aminoacido	Pressione Hgg. cm.	Velocità cm. <sup>3</sup> in 1'	Durata ore	Aminoacidi del liquido NaOH $\frac{1}{10}$ n				Aminoacidi del rene NaOH $\frac{1}{10}$ n			Aminoacidi del liquido H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n			Aminoacidi del rene H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n			Ammoniaca neofornata NaSO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n	Peso del rene grammi		Osservazioni			
						prima	dopo	diminuzione		assol.	differ.	normale	circolato	differ.	prima	dopo	differ.	normale		circolato	normale		circolato	aumento	
								assol.	o/o																
I	530	Glicocolla gr. 4	12-16	22	2	487,6	436,3	51,3	10,6	19,5	71	+ 51,5									61	100	39	( <sup>1</sup> )	
II	520	Glicocolla gr. 4	varia	varia	3	461	409,2	51,8	11	10,4	46,08	35,88	16,12	3,5		12,4	12,4	33	14,4	- 18,6		50	75	25	( <sup>2</sup> )
III	500	Glicocolla gr. 4	6-12	25	1 $\frac{1}{2}$	483,3	409	74,3	15,4	9,8	53,2	43,4	30,9	6,4		37,8	37,8	60	40	- 20	scomparsi 6,2 ( <sup>2</sup> )	56	84	28	( <sup>3</sup> )
IV	500	$\alpha$ -alanina gr. 4	12-14	24	1 $\frac{1}{2}$	366,3	314,6	51,9	14,1	12	28	16	35,9	9,8		20,4	20,4	28	14	- 14	6,4	25	55	30	( <sup>4</sup> )
V	520	$\alpha$ -alanina gr. 4	6-10	28	2 $\frac{3}{4}$	398,7	333,3	65,4	16,4	14	42	28	37,4	9,4		62,5	62,5	16	20	+ 4	66,5	41	60	19	( <sup>5</sup> )
VI	500	asparagina neu- tralizzata alla fe- noltaleina gr. 4	10-14	22	1 $\frac{1}{2}$	240	164,2	75,8	31,6	10	17	7	68,8	28,6		101,8	101,8	36	24	- 12	89,8	40	55	15	( <sup>6</sup> )

(<sup>1</sup>) Peso dell'animale Kg. 17. Secrezione cm.<sup>3</sup> 280; aminoacidi di essa NaOH  $\frac{1}{10}$  n = 216,4. Dosaggio NH<sub>3</sub> perduto. Acetone: I  $\frac{1}{10}$  n = 5,6 cm.<sup>3</sup>.  
 (<sup>2</sup>) Non si raccoglie prodotto di secrezione. Peso dell'animale Kg. 17.

(<sup>3</sup>) Secrezione cm.<sup>3</sup> 60. Peso dell'animale Kg. 20.

(<sup>4</sup>) Secrezione cm.<sup>3</sup> 175; aminoacidi di essa NaOH  $\frac{1}{10}$  n = 121,6. Peso dell'animale Kg. 17.

(<sup>5</sup>) Non si raccoglie prodotto di secrezione. Acetone: tracce. Peso dell'animale Kg. 15.

(<sup>6</sup>) Secrezione cm.<sup>3</sup> 100. Acetone: I  $\frac{1}{10}$  n = 110 cm.<sup>3</sup> Peso dell'animale Kg. 21.



## CIRCOLAZIONI CON SANGUE

Esperimento	Quantità di liquido	Aminoacido	Pressione	Velocità cm. <sup>3</sup> in 1'	Durata	Peso del rene grammi			Aminoacidi del liquido NaOH 1/10 n cm. <sup>3</sup>				Aminoacidi del rene NaOH 1/10 n cm. <sup>3</sup>			Aminoacidi del liquido H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> 1/50 n cm. <sup>3</sup>				Ammoniaca del rene H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> 1/50 n cm. <sup>3</sup>		Ammoniaca neofornata H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> 1/50 n cm. <sup>3</sup>	Osservazioni			
						normale	circolato	ammonto	prima	dopo	diminuzione		norm.	circol.	differ.	assol.	o/o	prima	dopo	differ.	norm.			circol.	differ.	
											assol.	%														
I	500	Glicocolla gr. 4	18-22	4	3	54	67	13	450	394,5	55,5	12,3	35,8	56,9	21,1	34,4	7,6	95	59,5	52	—	—	( <sup>1</sup> )			
II	500	Glicocolla gr. 4,2	12-16	5	2 1/3	39	44	5	520	472,9	47,1	9	11	24	13	34,1	6,5	traccia	27	27 circa	16	+ 4	3,1	( <sup>2</sup> )		
III	520	Glicocolla gr. 4	8-12	13	1 1/3	44,5	49,1	4,6	485,3	460	25,3	5,1	16,8	36,8	20	5,3	1,1	7,5	37,3	29,8	10	12,5	+ 2,5	32,3	( <sup>3</sup> )	
IV	500	Glicocolla gr. 4	13-16	4	3	47,5	58	10,5	453,3	404,6	48,7	10,7	7,68	31,2	23,52	25,2	5,6	7,5	22	15,5	25	15	—	10	5,5	( <sup>4</sup> )
V	450	α-alanina gr. 3,5	18-22	1,5	3 3/4	34	39	5	267	222	45	16,9	5	16,3	11,3	33,7	12,6	5,4	41,8	36,4	12	12,8	+ 0,8	42,6	( <sup>5</sup> )	
VI	520	α-alanina gr. 4	14-19	3	3	45	55	10	332,7	299,2	33,5	10	14,6	30,8	16,2	17,3	5,2	5,5	35	29,5	50	17	—	3,3	= scamparsi 3,5(?)	( <sup>6</sup> )
VII	500	asparagina neutra- lizzata al torna- sole . . . gr. 4	18-20	2,5	1 1/3	35	40	5	230	217,8	12,2	5,3	7,9	13,5	5,6	6,6	2,9	—	—	—	18	21,4	+ 3,4	—	( <sup>7</sup> )	

(<sup>1</sup>) Peso dell'animale Kg. 23,2. Urina cm.<sup>3</sup> 10 [contiene amminoacidi = NaOH 1/10 n cm.<sup>3</sup> 10; ammoniaca = H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> 1/50 n cm.<sup>3</sup> 2,5]. Acetone: 1 1/10 n cm.<sup>3</sup> 5,84.

(<sup>2</sup>) Peso dell'animale Kg. 12,7. Non si raccoglie liquido dall'uretere.

(<sup>3</sup>) Peso dell'animale Kg. 18. Sangue diluito con soluzione fisiologica. Urina cm.<sup>3</sup> 3.

(<sup>4</sup>) Peso dell'animale Kg. 28. Urina: gocce.

(<sup>5</sup>) Peso dell'animale Kg. 12,3. Non si raccoglie urina.

(<sup>6</sup>) Peso dell'animale Kg. 19. Non si raccoglie urina.

(<sup>7</sup>) Sangue diluito di 1/10 con soluzione fisiologica. Mancano i dosaggi dell'NH<sub>3</sub> nel sangue. Peso dell'animale Kg. 18.

Dalle ricerche riferite emerge:

che, facendo circolare nel rene isolato sangue contenente aminoacidi in forte concentrazione (8 ‰ circa), si avverte sempre, dopo la circolazione, una diminuzione del contenuto in aminoacidi del sangue circolato, che può raggiungere persino il 17 ‰;

degli aminoacidi che non si ritrovano, nel sangue circolato, una parte, che può raggiungere il 3-5 ‰ dell'aminoacido posto in circolazione e il 25-50 ‰ di quelli mancanti nel sangue (solo in un caso fu superata notevolmente questa cifra), si ritrova inalterata nell'organo. La quantità di aminoacido effettivamente scomparsa durante la circolazione è pertanto compresa, in media, fra il 5 e il 10 ‰.

Adoperando per la circolazione liquido di Ringer con gli stessi aminoacidi, si ha sempre una diminuzione dagli aminoacidi della soluzione circolata, che raggiunge il 16,4 ‰ (solo in una circolazione con asparagina oltrepassa il 30 ‰) e che è quindi pressochè uguale alla corrispondente osservata nella circolazione con sangue.

Tuttavia nelle esperienze, eseguite facendo circolare soluzione fisiologica, la quantità di aminoacidi che si ritrova inalterata nel tessuto renale è notevolmente superiore a quella che si riscontra nelle circolazioni con sangue, e in qualche caso riesce perfino a giustificare di per sè sola la perdita di aminoacidi nel liquido.

La quantità di ammoniaca che si riscontra nel liquido è spesso rilevante così da corrispondere a buona parte degli aminoacidi effettivamente scomparsi durante la circolazione. Ma dubitiamo che il trattamento fatto subire agli organi per la ricerca degli aminoacidi abbia potuto in certa misura alterarne il contenuto in ammoniaca; cosicchè i dati relativi hanno un valore più comparativo che assoluto, essendo stati ottenuti dopo un eguale trattamento sia del rene normale e sia di quello circolato.

Ad ogni modo possiamo affermare che, contrariamente a quanto fu osservato per il tessuto muscolare nelle circolazioni con liquido di Ringer, il rene, anche se perfuso con soluzione fisiologica, si dimostra sempre capace di distruggere notevole quantità di aminoacidi. Ciononostante, anche sperimentando col rene si nota che, nelle circolazioni con sangue, la scomparsa assoluta di aminoacidi è sensibilmente superiore a quella che si osserva usando liquido di Ringer. E tale differenza appare più cospicua, quando si consideri che, se si usa soluzione fisiologica, la circolazione è incomparabilmente più rapida che non nelle esperienze con sangue; e che quindi con maggiore facilità e in più larga misura gli aminoacidi disciolti nel liquido di circolazione possono subire l'azione degli epitelii renali con cui vengono a contatto.

Concludendo, dalle presenti ricerche risulta che il fenomeno dell'accumulo di aminoacidi nel rene è molto cospicuo, sia che essi circolino disciolti nel sangue, sia che circolino nel liquido di Ringer; ma che nel secondo caso è

tanto più grande, da poter in qualche esperienza giustificare di per sè solo la diminuzione degli aminoacidi osservata nel liquido circolante. Epperò nella totalità delle ricerche eseguite col sangue, e sulla maggioranza di quelle eseguite con liquido di Ringer, risulta pure che una più o meno cospicua parte degli aminoacidi mancanti è stata effettivamente distrutta.

**Fisiologia.** — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* Nota IV, *Azione dell'intestino sugli aminoacidi aggiunti al sangue o al liquido di Ringer circolante*, del dott. UGO LOMBROSO, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Dell'influenza che l'intestino esercita di fronte agli aminoacidi che giungono ad esso pel circolo sanguigno non è stato trattato *ex-professo*. Però in numerose ricerche, eseguite in questi ultimi anni, è stato indirettamente portato un contributo anche a tale argomento, in quanto che si è cercato di determinare che cosa avvenga degli aminoacidi che attraversano la mucosa intestinale durante l'assorbimento alimentare.

La soluzione di questo quesito appariva di capitale interesse per poter determinare sotto quale forma le sostanze proteiche alimentari penetrino nel nostro organismo. A questo proposito si dibattono varie dottrine. Secondo alcuni l'assorbimento delle sostanze proteiche alimentari avviene senza una loro profonda idrolisi e soltanto una piccola parte di esse viene assorbita sotto forma di aminoacidi: secondo altri invece l'assorbimento intestinale avviene esclusivamente dopo la completa idrolisi delle sostanze proteiche. Fra gli autori che accettano quest'ultima concezione, esiste poi una discordanza, poichè gli uni ammettono una sintesi degli aminoacidi nella mucosa intestinale, gli altri ritengono invece che essi giungono inalterati nel circolo sanguigno.

Per quanto a prima vista possa sembrare facile la risoluzione di questo problema, esso è ancora insoluto. Gli autori stessi, che vi hanno contribuito, riconoscono che le loro esperienze non hanno portato alcun argomento risolutivo a favore dell'una o dell'altra ipotesi.

Accennerò brevemente ai vari lavori eseguiti in proposito.

Il Rona <sup>(1)</sup> introducendo anse intestinali di gatto contenenti aminoacidi nel liquido di Tyrode vide passare una parte di essi nel liquido esterno, senza che si modificasse in misura apprezzabile la quantità totale di aminoacidi. Dal risultato di tali esperienze non appare appoggiata l'ipotesi di una sintesi degli aminoacidi nella mucosa intestinale.

(<sup>1</sup>) Biochem. Zeitschr. XLVI, 307, 1912.

Si deve però considerare che la vitalità delle anse intestinali poste in tali condizioni era molto problematica. Perchè se nelle anse anche messe in tali condizioni si possono avvertire ben conservati movimenti peristaltici, non si può da essi arguire che si sia pure conservata la vitalità e funzionalità del tessuto epiteliale che costituisce la mucosa, e che è probabilmente più delicato e labile del tessuto muscolare.

Cohnheim (<sup>1</sup>) sperimentando con intestino di cefalopodi e pesci immerso nel sangue degli animali stessi, vide che aminoacidi introdotti nell'intestino si ritrovano all'esterno, alcuni disamidati profondamente, altri poco.

Anche da queste ricerche, per quanto più complete, non si può trarre una sufficiente nozione, perchè noi non sappiamo se l'ammoniaca ritrovata all'esterno sia dovuta alla decomposizione degli aminoacidi o sia ceduta dal tessuto intestinale.

Comunque secondo il Cohnheim l'intestino o si lascia attraversare dagli aminoacidi o li idrolizza: non risulterebbe una loro sintesi.

Abderalden (<sup>2</sup>), pur avendo ripetutamente dimostrato la formazione ed il passaggio di aminoacidi nel sangue durante la digestione e l'assorbimento delle sostanze proteiche, ritiene però di non poter azzardare alcuna ipotesi sulla eventuale loro penetrazione *in toto* nel sangue, mancandogli i dati numerici complessivi sulla quantità formatasi e quella penetrata nel sangue.

E questa nozione, non è evidentemente facile a trarre da ricerche eseguite sull'animale in vita, nel quale gli scambi sono troppo rapidi e complessi per garantirci dalla possibile sottrazione di aminoacidi da parte di uno o di un'altro tessuto, come bene hanno dimostrato le ricerche di V. Slycke e Meyer.

E perciò non mi trattengo a ricordare le indagini eseguite col confronto del contenuto di aminoacidi nel sangue arterioso o venoso prima o dopo la somministrazione di sostanze proteiche ecc., indagini che sono molto interessanti, ma che non chiariscono nulla per ciò che riguarda il problema da noi preso in esame. Tutte queste ricerche sono molto ben riassunte in una Nota recentissima di Gayda (<sup>3</sup>) alla quale rimando il lettore che si interessa del problema.

Il Gayda ha inoltre portato all'argomento un notevole contributo sperimentale. Egli introduceva nell'intestino di gatto carne di cavallo idrolizzata completamente con acido solforico, e poi faceva circolare liquido di Tyrode nei vasi sanguigni di tale intestino (dopo averli sbarazzati del contenuto sanguigno con abbondante lavaggio).

Esaminando di tratto in tratto il liquido circolante egli constatò la presenza di aminoacidi nel liquido della vena mesenterica e del duto tora-

<sup>1</sup>) Zeitschr. f. physiol. Chem. XXXV, 396, 1902; LIX, 239, 1909; LXI-189-1909.

<sup>2</sup>) Zeitschr. f. physiol. Chem. LXXXI, 473, 1912; LXXXVIII, 478, 1913.

<sup>3</sup>) Archivio di Fisiologia XIII, 83-1914.



cico: il rapporto dell'azoto aminico coll'azoto totale assorbito, è minore del rapporto dell'azoto aminico coll'azoto complessivo del liquido iniettato nell'intestino. Gayda è incerto se tale risultato si debba interpretare come l'esponente di una selezione nell'assorbimento delle varie sostanze proteiche, o come dovuto ad una formazione di complessi fra gli aminoacidi. Non gli fu possibile di scegliere fra queste due opposte interpretazioni, perchè gli mancava un dato necessario, e cioè il quantitativo di aminoacidi scomparsi dall'intestino. Le ricerche fatte a tale intento andarono fallite, perchè inquinate dal riversarsi nel lume intestinale di aminoacidi contenuti in gran quantità nel tessuto.

Ciò dimostra quanto favorevole sia, nello studio dell'argomento in esame, la disposizione adottata nelle nostre ricerche. Di determinare cioè il contenuto in aminoacidi non soltanto del liquido circolante prima e dopo l'esperimento, ma anche quello del tessuto sperimentato: e di determinare poi anche le sostanze che potevano indicarci l'ulteriore consumo di tali aminoacidi.

Nelle esperienze che riferisco operavo nel seguente modo,

L'animale veniva tenuto digiuno per un periodo di 24 ore (salvo in alcune esperienze che menzioneremo): poi veniva rapidamente dissanguato dalla carotide avendo cura di introdurre per la giugulare una certa quantità di soluzione di Ringer.

Questa pratica allontana l'inconveniente della formazione di trombi durante la circolazione. Estratto l'intestino si vuotava del suo contenuto con abbondante lavaggio di soluzione fisiologica: si provvedeva poi con ripetute pressioni digitali a liberare il lume intestinale dal liquido introdotto. Naturalmente però piccole quantità, sia di sostanze, come di liquido rimangono sempre aderenti alle pareti. Il campione intestinale di controllo veniva prelevato dal segmento immediatamente vicino all'esperimentato: in qualche caso due campioni vennero presi uno del tratto orale e l'altro dell'aborale, e ciò per ottenere una media corrispondente al più possibile a quella dell'intestino sperimentato. La circolazione nell'intestino si svolge in forma assai più rapida e copiosa che non negli altri organi di cui abbiamo riferito nelle precedenti Note (rene, tessuto muscolare) anche quando la pressione del liquido circolante è mantenuta più bassa.

Nelle varie ricerche eseguite si constatò sempre un aumento più o meno notevole del peso dell'organo sperimentato, dovuto in massima parte o nella totalità al formarsi del secreto (o filtrato) nel lume intestinale.

Nelle esperienze con sangue si ha una produzione assai più scarsa di secreto enterico, il quale appare denso, mucilaginoso, con tutti i caratteri e le proprietà enzimatiche del normale secreto. Nel caso invece di circolazioni con soluzione fisiologica il secreto, o per meglio dire, il filtrato, era così abbondante da dover interrompere le esperienze per deficienza di liquido circolante.

# RICERCHE ESEGUITE CON SANGUE.

## I.

Cane peso kg. 4,50. — Peso segmento intestino = gr. 108. Dopo ore 1 e mezza circolazione = gr. 155. Sangue cc. 500 (diluito con Ringer) +  $\alpha$  alanina gr. 4. Pressione 80-120 mm. mercurio. Velocità circolatoria per minuto 14-18 cc.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede	. . . . .	9,2 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede	8,2	" "
Per 35 gr. intestino la formoltitolazione richiede	. . . . .	24 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede	30	" "
NH <sub>3</sub> per 100 cc. sangue dopo la circolaz. corrispondono a	5 cc. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n	
" " 35 gr. tessuto	" "	6,5 " "
" " " " dopo la circolaz.	" "	7,2 " "

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili col formolo da richiedere 64,6 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 36 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Deficit assoluto = 28,6 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

## II.

Cane peso kg 17. — Peso segmento intestino = gr. 185. Dopo ore 1 e mezza circolazione = 195 gr. + succo cc. 55. Sangue cc. 520 + gr. 4  $\alpha$  alanina. Pressione 120-160 mm. mercurio. Velocità circolatoria per minuto 10-15 cc.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede	. . . . .	9,0 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede	7,3	" "
Per 55 cc. succo la formoltitolazione richiede	. . . . .	26,9 " "
Per 50 gr. intestino	" "	24 " "
" " dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede	27	" "
NH <sub>3</sub> per 100 cc. sangue	. . . . .	3,5 cc. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n
" " " " dopo la circolaz. corrisp. a	8,6	" "
" " 50 gr. tessuto	. . . . .	16,5 " "
" " " " dopo la circolaz. corrisp. a	14	" "

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 67 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 16,5 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Deficit assoluto 50,5 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

## III.

Cane kg. 7,20. — Peso segmento intestino = gr. 175. Dopo ore 1 di circolazione = gr. 195 + succo 20 cc., sangue cc. 550 + glicocolla gr. 4. Pressione 100-140 mm. mercurio. Velocità circolatoria per minuto 6-10 cc.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede	. . . . .	10 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede	9,3	" "
Per 20 cc. succo	" "	12 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
Per 50 gr. intestino	" "	13 " "
" " dopo circolaz.	" "	12,5 " "
NH <sub>3</sub> per 50 gr. intestino	. . . . .	9,8 cc. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n
" " dopo circolazione	. . . . .	11,5 " "
" sangue è andata perduta.		

Complessivamente mancano nel sangue tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 37,8 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 3,6 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Deficit assoluto 41,4 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

IV.

Cane peso kg. 12. — Peso segmento intestino gr. 170. Dopo ore 1 e mezzo circolazione gr. 200. Sangue cc. 500 + gr. 4 glicocollo. Pressione 80-130 mm. Velocità 10-14 cc. al minuto.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede . . . . .	14,5 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo la circolaz. " " . . . . .	13,7 " "
Per 50 gr. intestino la formoltitolazione richiede . . . . .	23 " "
" " dopo la circolaz. " " . . . . .	24,5 " "
NH <sub>3</sub> per 100 cc. sangue dopo la circolazione . . . . .	14 cc. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n
" 50 gr. intestino . . . . .	26 " "
" " " dopo la circolazione . . . . .	20 " "

Complessivamente mancano nel sangue tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 56 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne ritrovano in più nell'intestino da richiedere 18,8 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Deficit assoluto 37,2 cc, Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

V.

Cane peso kg. 28. — Peso segmento intestino gr. 165. Dopo ore 1 e mezzo circolazione gr. 210. Sangue cc. 510 + 4 gr. glicocollo. Pressione 120-160 mm. mercurio. Velocità per minuto cc. 8-14.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede . . . . .	14 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo la circolaz. " " . . . . .	10,8 " "
Per 60 gr. intestino la formoltitolazione richiede . . . . .	53,2 " "
" " dopo la circolaz. " " . . . . .	33,6 " "
NH <sub>3</sub> per 100 cc. sangue dopo la circolazione, perduta.	
" 60 gr. tessuto . . . . .	26,2 cc. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n
" " " dopo la circolazione . . . . .	22,5 " "

Complessivamente mancano nel liquido circolante tante sostanze titolabili col formolo da richiedere 142,2 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano nel tessuto in più da richiedere 91,8 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Deficit assoluto 50,9 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

VI.

Cane peso kg. 19 (\*). — Peso segmento intestino = gr. 220. Dopo ore 1 e mezza circolazione gr. 250. Sangue cc. 500 + 4 gr. α alanina. Pressione 140-160 mm. mercurio. Velocità per minuto 26-30 cc.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede . . . . .	11 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo la circolaz. " " . . . . .	9,6 " "
Per 50 gr. tessuto la formoltitolazione richiede . . . . .	78 " "
" " dopo la circolaz. " " . . . . .	53,8 " "
NH <sub>3</sub> per 100 cc. sangue . . . . .	3,5 cc. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n
" " " dopo circolazione . . . . .	10,2 " "
" 50 gr. tessuto . . . . .	7,5 " "
" " " dopo circolazione . . . . .	9,5 " "

(\*) L'animale viene sacrificato quattro ore dopo l'ultimo parto.

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 69,9 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano in meno nel tessuto da richiedere 74,2 cc, Na OH  $\frac{1}{10}$  n. *Deficit* assoluto 141,1 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

# ESPERIENZE ESEGUITE CON LIQUIDO DI RINGER.

## VII.

Cane peso kg. 6,6. — Peso segmento intestino = gr. 140. Dopo ore 1 e mezza circolazione = gr. 155 + 19 cc. succo. Soluz. Ringer cc. 500 + 4 gr. glicocolla. Pressione 60-80 mm. mercurio. Velocità per minuto 18-26 cc.

Per 10 cc. liquido la formoltitolazione richiede . . . .	10,6 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo la circolaz. " "	9,2 " "
" secreto la formoltitolazione richiede . . . .	9 " "
Per 50 gr. tessuto " "	14,6 " "
" " dopo la circolaz. " "	23,6 " "
NH <sub>3</sub> per 100 cc. liquido dopo la circolazione . . . . .	6 cc. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n
" " secreto . . . . .	7,5 " "

Complessivamente mancano nel liquido tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 35 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 33 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. *Deficit* assoluto 2 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

## VIII.

Peso cane kg. 16. — Peso segmento intestino gr. 160. Dopo ore 1 e mezza circolazione = gr. 200 + 60 cc. succo. Soluzione Ringer cc. 500 + gr. 4 glicocolla. Pressione 60-100 mm. mercurio. Velocità per minuto 22-30 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede . . . .	15,3 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo la circolaz. " "	12,6 " "
" secreto la formoltitolazione richiede . . . .	14,2 " "
Per 50 gr. tessuto " "	20,4 " "
" " dopo la circolaz. " "	38 " "
NH <sub>3</sub> per 100 cc. liquido dopo la circolazione . . . . .	14 cc. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n
" 50 gr. tessuto . . . . .	26 " "
" " " dopo la circolazione . . . . .	30 " "

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 117 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 87,6 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. *Deficit* assoluto 30,9 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

## IX.

Cane peso kg. 20. — Peso segmento intestino = gr. 170. Dopo ore 1 e mezza circolazione gr. 175 + 125 cc. succo che viene addizionato al liquido circolato. Soluzione Ringer cc. 520 + 4 gr. asparagina, alcalinizzata al tornasole, acida alla fenoftaleina. Pressione mm. 60-100 mercurio. Velocità al minuto 10-18 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede . . . .	7,2 cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " e secreto . . . . .	6,5 " "
" 50 gr. di tessuto la formoltitolazione richiede . . .	18,8 " "
" " dopo la circolaz. " "	20 " "

NH<sub>3</sub> perduto.



Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 24,8 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 9,5 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. *Deficit* assoluto 15,3 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

X.

Cane peso kg. 18. — Peso segmento intestino = gr. 145. Dopo ore 1 e mezza circolazione gr. 190 + 190 cc. secreto. Soluzione Ringer cc. 550 + 4 gr. asparagina (alcalinizzata al tornasole, acida alla fenoftaleina). Pressione 80-120 mm. mercurio. Velocità al minuto 16-20 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede . . .	7	cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo la circolaz. " "	6,2	" "
Per 100 cc. succo la formoltitolazione richiede . . .	7,3	" "
Per 50 gr. tessuto " "	29	" "
" " dopo la circolaz. " "	22	" "

NH<sub>3</sub> perduto.

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 20,5 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano in meno nel tessuto da richiedere 3,2 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. *Deficit* assoluto 23,7 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

XI.

Peso cane kg. 6,50. — Segmento intestino peso gr. 140. Dopo ore 1 e mezza di circolazione gr. 148 + 105 cc. succo. Soluzione di Ringer 500 cc. + 4 gr.  $\alpha$  alanina. Pressione mm. 60-100 mercurio. Velocità al minuto 4-10 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede . . .	11,8	cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo la circolaz. " "	11,4	" "
" secreto " "	11,2	" "
Per 50 gr. tessuto " "	5,5	" "
" " dopo la circolaz. " "	5,6	" "

NH<sub>3</sub> per 100 cc. secreto e liquido dopo circolaz. . . 14 cc. H<sub>2</sub> SO<sub>4</sub>  $\frac{1}{50}$  n  
" sul tessuto perduto.

Complessivamente mancano nel liquido circolante tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 15,5 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 2,1 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n. *Deficit* assoluto 13,4 cc. Na OH  $\frac{1}{10}$  n.

XII.

Cane peso kg. 15. — Segmento intestino gr. 165. Dopo ore 1 e mezza di circolazione gr. 195 + 265 cc. di succo. Soluzione di Ringer 510 cc. + 4 gr.  $\alpha$  alanina. Pressione mm. 60-120. Velocità al minuto 14-24 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede . . .	11,9	cc. Na OH $\frac{1}{10}$ n
" " dopo la circolaz. " "	8,2	" "
" secreto " "	8,1	" "
Per 65 gr. tessuto " "	6,4	" "
" " dopo la circolaz. " "	8,8	" "
NH <sub>3</sub> per 100 cc. secreto " "	33,5	cc. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> $\frac{1}{50}$ n
" cc. liquido dopo circolaz. " "	7,5	" "
" 65 gr. tessuto " "	10	" "
" " " " " "	13	" "

Complessivamente mancano nel liquido circolante tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 88,1 cc. Na OH  $\frac{1}{10}n$ . Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 74 cc. Na OH  $\frac{1}{10}n$ . *Deficit* assoluto 14,1 cc. Na OH  $\frac{1}{10}n$ .

\* \* \*

Dalle esperienze riferite emerge che:

Facendo circolare nell'intestino isolato sangue contenente aminoacidi in forte concentrazione (8 ‰ circa) si avverte sempre una loro diminuzione, che raggiunge persino il 20 ‰.

Parte degli aminoacidi scomparsi dal sangue può trovarsi accumulata nel tessuto sperimentato, ma tale deposito è sempre assai lieve ed in qualche caso non soltanto non si riscontra deposito, ma al contrario si avverte una scomparsa anche degli aminoacidi proprii del tessuto. In ciò l'intestino si comporta in modo assai diverso dagli altri tessuti già studiati. Specialmente interessante a tale proposito è l'esperienza VI nella quale, essendo molto elevato il contenuto in aminoacidi della mucosa, ne scomparve il 21 ‰, mentre nel sangue ne era scomparso il 18 ‰. Il risultato di questa esperienza suggerisce una nuova serie di ricerche sul comportamento degli aminoacidi che si trovano già assorbiti nell'intestino. Se il fenomeno osservato ora incidentalmente è dovuto alla loro scomparsa (e non ad una casuale loro differente distribuzione nell'intestino) tanto più evidentemente esso sarà messo in luce con esperienze eseguite con sangue normale invece che con sangue carico di aminoacidi. Poichè in quest'ultimo caso la tendenza dei tessuti a saturarsi di aminoacidi del liquido circolante viene a controbilanciare ed a mascherare la scomparsa di quelli preesistenti nel tessuto. Su tale argomento sono in corso esperienze.

Adoperando per la circolazione liquido di Ringer si osserva pure una diminuzione degli aminoacidi disciolti, inferiore però a quella osservata nelle esperienze con sangue.

Inoltre nelle esperienze eseguite con liquido di Ringer il deposito degli aminoacidi nel tessuto è assai superiore, tanto che in qualche caso corrisponde esattamente alla quantità degli aminoacidi scomparsi.

La produzione di  $\text{NH}_3$  osservata nelle varie esperienze non giustifica che in minima parte il *deficit* assoluto di aminoacidi constatato: e solo in una o due esperienze (IV-XII) l' $\text{NH}_3$  riscontrato, rappresenta una rilevabile parte dell' $\text{N}$  aminico scomparso.

Chimica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.*  
V. *Azione del tessuto muscolare funzionante sugli aminoacidi aggiunti al sangue circolante.* Nota dei dott. U. LOMBROSO e PATERNI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Chimica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.*  
VI. *Sul comportamento degli aminoacidi contenuti nella mucosa enterica o nel lume intestinale.* Nota dei dott. U. LOMBROSO e C. ARTOM, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* IV. *Influenza del riposo sulla secrezione spermatica del cane.* Nota del dott. G. AMANTEA, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* V. *Osservazioni sulla secrezione spermatica dell'uomo.* Nota dei dottori G. AMANTEA e T. RINALDINI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Chimica fisiologica. — *Ricerche sull'arginasi: intorno all'azione dell'arginasi sulla creatina* <sup>(1)</sup>. Nota III del dott. ANTONINO CLEMENTI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

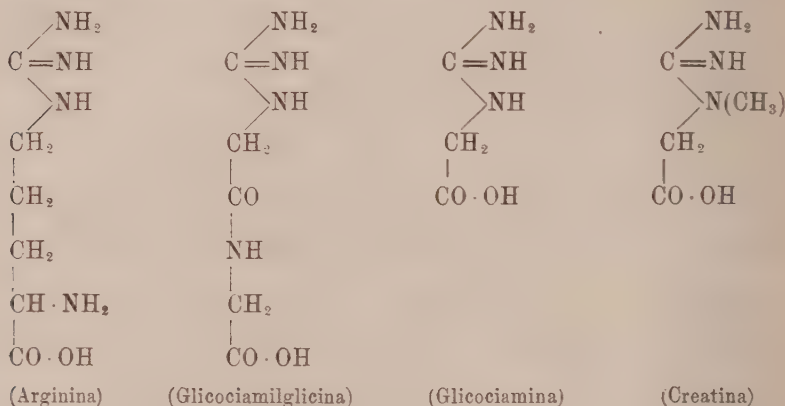
Le mie ricerche sistematiche intorno alla distribuzione dell'arginasi nelle diverse classi di vertebrati hanno portato la dimostrazione, di natura biologica, della partecipazione effettiva di questo fermento alla funzione uropoietica del fegato; l'arginasi assume quindi un posto di primo ordine tra i fermenti dell'organismo, e con essa acquistano un singolare interesse fisiologico tutte le svariate questioni che si collegano alla biologia e alla chimica biologica, ancora sconosciuta, di questo fermento; primo fra tutti ci si presenta il problema riguardante la *specificità di azione dell'arginasi*, il quale si collega da una parte col *problema della specificità dei fermenti in genere*, e dall'altra col *problema speciale della formazione di urea nell'organismo per via idrolitica*.

Per risolvere il problema della specificità di azione dell'arginasi, è necessario di ricercare se l'arginasi sia un fermento capace di *staccare il nucleo guanidinico* dalla molecola delle *diverse sostanze organiche* che lo

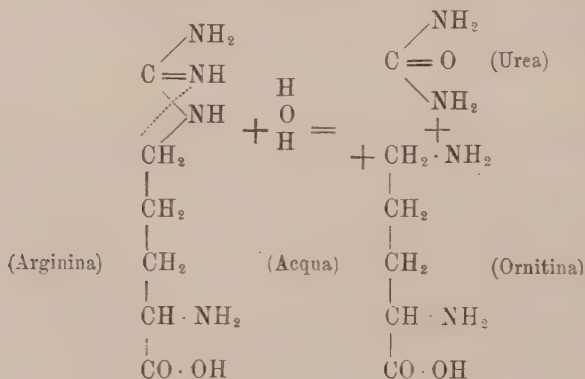
(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica fisiologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. D. Lo Monaco.

portano legato, o se invece essa sia in grado di aggredire solamente la *molecola dell'arginina* e di staccare il nucleo guanidinico, solo quando esso faccia parte della molecola di quest'ultima.

Se l'arginasi fosse un fermento generale *deguanidinizzante*, esso dovrebbe agire, oltre che sull'arginina, anche sulla creatina, sulla glicociamina e sulla glicociamilglicina <sup>(1)</sup>, data l'analogia strutturale di questi corpi. come si può rilevare dalle seguenti formule di struttura:



Come è noto, l'arginina, in seguito all'azione idrolizzante dell'arginasi, si scinde in urea e ornitina secondo questa equazione:



Analogamente, per azione dell'arginasi, la glicociamina, la glicociamilglicina e la creatina si dovrebbero scindere la prima in urea e glicocolla,

<sup>(1)</sup> Clementi Antonino, *Introduzione del nucleo guanidinico nella molecola dei polipeptidi, e sua importanza fisiologica*. Rend. Acc. Lincei, vol. XXIV, serie 5<sup>a</sup>, 1° sem., fasc. 1°; Id., *Introduzione del nucleo guanidinico nella molecola dei polipeptidi: sintesi della guanidoglicilglicina*. Gazzetta chimica italiana, anno XLV, parte I, fasc. 1°, 1914.





che nell'organismo la prima derivi dalla seconda, sebbene finora non sia riuscito possibile il dimostrare nettamente una tale derivazione. Sembra d'altra parte dimostrato, dalle ricerche di Pekelharing e van Hoogenhujze (<sup>1</sup>), che la creatina sia un prodotto tipico *finale del ricambio materiale delle cellule muscolari*, e che stia in rapporto non tanto coll'*attività contrattile*, quanto coll'*attività tonica della fibra muscolare*; in altri termini, la creatina rappresenterebbe, nell'organismo, specialmente l'*esponente chimico del tono muscolare*.

L'azione dell'arginasi sulla creatina è stata studiata finora da un solo autore, il Dakin (<sup>2</sup>), il quale non poté constatare un'azione dell'arginasi sulla creatina e creatinina. Abderhalden (<sup>3</sup>) ha proposto recentemente di chiamare l'arginasi « *deguanidasi* »: questa denominazione implicherebbe il concetto della non specificità dell'azione di questo fermento. Ho creduto quindi di sottoporre il problema a nuove ricerche sperimentali. Nelle mie esperienze, per ricercare se la creatina sotto l'azione dell'arginasi si scinde in urea e sarcosina, ho applicato il metodo di Sørensen, fondandomi sul fatto che, mentre la *sarcosina*, come ho dimostrato in ricerche precedenti (<sup>4</sup>), *si comporta, alla titolazione secondo il metodo di Sørensen, come un acido monobasico*, la *creatina si comporta come un corpo neutrale*: se la creatina subisse l'azione idrolitica dell'arginasi scindendosi in urea e sarcosina, mediante la titolazione alla formaldeide si potrebbe riconoscere l'avvenuta scissione dal cambiamento di comportamento della creatina nella titolazione al formolo secondo il metodo di Sørensen.

Ho condotto le mie esperienze nel modo seguente: fu preparato dell'estratto acquoso dal fegato di cane ucciso di recente, nel quale l'azione dell'arginasi è presente e assai intensa (<sup>5</sup>); l'estratto acquoso di fegato veniva mescolato in un *erlenmeyer* con una soluzione  $\frac{1}{20}$  *n* di creatina e posto in termostato a 37° per un tempo determinato, dopo aggiunta di toluolo: preparavo io stesso la creatina per via sintetica, secondo il metodo di Strecker,

unendo direttamente la cianamide  $\text{C}\equiv\text{N}$  alla sarcosina  $\begin{array}{c} \text{NH}_2 \\ \diagup \\ \text{CH}_2 \cdot \text{N} < \begin{array}{c} \text{H} \\ \text{CH}_3 \end{array} \\ | \\ \text{CO} \cdot \text{OH} \end{array}$ ; la

(<sup>1</sup>) Pekelharing und van Hoogenhujze, *Zeitschr. f. physiol. Chem.* 64, 262, an. 1910; Pekelharing, *Zeitschr. f. physiol. Chem.* 75, 207, an. 1911.

(<sup>2</sup>) Dakin, *The action of arginase upon kreatin*. Journ. of biol. chem., III, 435, an. 1907.

(<sup>3</sup>) Abderhalden, *Lehrbuch der physiologischen Chemie*. Berlin, 1914.

(<sup>4</sup>) Clementi Ant., *Sulla possibilità del titolare al formolo il gruppo amminico monosostituito degli amino-acidi*. Rend. Accad. dei Lincei.

(<sup>5</sup>) Clementi Antonino, *La distribuzione dell'arginasi nell'organismo e nella serie dei vertebrati*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, serie 5<sup>a</sup>, 2° sem., fascic. 11°, an. 1914.

creatina veniva individualizzata al microscopio in base alla forma prismatica caratteristica dei suoi cristalli, alla prova con il nitroprussiato di sodio dopo cottura di un campione con acido cloridrico, e la purezza della sostanza veniva stabilita mediante la determinazione del punto di fusione dei cristalli medesimi.

1<sup>a</sup> ESPERIENZA. — gr. 0,0715 di creatina purissima (p. m. 148) furono sciolti in 10 cc. di acqua in un *erlenmeyer*: a questo si aggiunsero pochi cc. di estratto acquoso di fegato di cane, e l'*erlenmeyer* fu posto in termostato a 37°, dopo aggiunta di toluolo, per la durata di 12 giorni.

6 febbraio 1915 18 febbraio 1915	Quantità adoperata di Na OH $\frac{1}{5} n$
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm.	0,05
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fe- gato di cane . . . . . 5 ccm.	0,30
Acqua distillata . . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fe- gato di cane . . . . . 5 ccm.	0,30
Come Sarcosina . . .	( calcolato 2,50 trovato 0,00

In questa esperienza la creatina, mescolata all'estratto acquoso di fegato, lasciata in stufa a 37°, dopo 13 giorni si comportava, alla titolazione al formolo, come un corpo perfettamente neutrale; questo fatto dimostra che, per azione dell'arginasi, non si formò nessuna quantità (anche piccola) di sarcosina, la quale si sarebbe messa subito in evidenza mediante la titolazione al formolo.

2<sup>a</sup> ESPERIENZA. — gr. 0,0715 di creatina purissima, da me preparata, furono sciolti in 10 cc. di acqua in un *erlenmeyer* e mescolati con pochi cc. di estratto acquoso di fegato di cane, e l'*erlenmeyer* fu posto in termostato a 37°, dopo aggiunta di toluolo, per la durata di sette giorni.

7 febbraio 1915 15 febbraio 1915	Quantità adoperata di Na OH $\frac{1}{5} n$
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm.	0,00
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fe- gato di cane . . . . . 3 ccm.	0,10
Acqua distillata . . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fe- gato di cane . . . . . 3 ccm.	0,10

Come sarcosina . . .  $\left\{ \begin{array}{l} \text{calcolato } 2,50 \\ \text{trovato } 0,00 \end{array} \right.$

In questa esperienza la creatina, aggiunta all'estratto acquoso di fegato di cane, lasciata in termostato a 37°, si comportava al formolo, dopo 7 giorni, come un corpo perfettamente neutrale; ciò dimostra che l'arginasi non determinò (neanche in piccola quantità) formazione di sarcosina, che si sarebbe messa in evidenza colla titolazione al formolo.

3<sup>a</sup> ESPERIENZA. — gr. 0,0715 di creatina furono sciolti in 10 cc. di acqua e mescolati con pochi cc. di estratto acquoso di fegato di cane in un *erlenmeyer*, che fu lasciato in termostato a 37°, dopo aggiunta di toluolo, per 9 giorni.

25 febbraio 1915 6 marzo 1915	Quantità adoperata di Na OH $\frac{1}{5} n$
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm.	0,00
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fe- gato di cane . . . . . 5 ccm.	0,30
Acqua distillata . . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fe- gato di cane . . . . . 5 ccm.	0,30

Come sarcosina . . .  $\left\{ \begin{array}{l} \text{calcolato } 2,50 \\ \text{trovato } 0,00 \end{array} \right.$



In questa esperienza la creatina, mescolata all'estratto acquoso di fegato di cane, lasciata in termostato a  $37^{\circ}$  per 9 giorni, si comportava come un corpo perfettamente neutrale; questo fatto dimostra che l'arginasi non determinò formazione (neanche in piccola quantità) di sarcosina, che si sarebbe messa in evidenza colla titolazione al formolo.

Dai risultati di queste esperienze si possono trarre le seguenti conclusioni:

1°) *Per azione dell'arginasi non ha luogo, concordemente con quanto ebbe ad osservare anche Dakin, la scissione della creatina in urea e sarcosina;*

2°) *L'arginasi non è un fermento capace di staccare il nucleo guanidinico indistintamente da ogni sostanza che lo porta legato, come vorrebbe indicare la denominazione di «deguanidasi» da Abderhalden proposta recentemente al posto di quella di arginasi;*

3°) *L'incapacità dell'arginasi di idrolizzare la creatina sta a favore del concetto della specificità di azione di questo fermento.*

Chimica fisiologica. — *Contributo allo studio dell'azione dei fermenti proteolitici sui polipeptidi.* Nota del dott. ANTONINO CLEMENTI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

I numeri reali (\*),  $Q_0$ , gli interi,  $N_0$ , e i razionali,  $R_0$ , contenuti nei  $Q_0$ , sono, indubbiamente, degli *enti semplici* <sup>(6)</sup> e precisamente degli

(\*) Avrò occasione di citare i lavori seguenti:

(1) G. Peano, *Formulario*, ed. I-V.

(2) M. Pieri, *Sopra gli assiomi aritmetici* [Acc. Gioenia in Catania, fasc. 2°, ser. 2ª, 1908].

(3) S. Catania, *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano* [Rendic. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, 2° sem., 1913, pp. 546-551, 639-642].

(4) C. Burali-Forti, *Propriétés formules etc.*, [Revue de mathématique di G. Peano, tom. VI, 1900, pp. 141-177 (Estratti, G. B. Petroni, Torino)].

(5) Idem, *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri* [Atti della R. Accad. di Torino, vol. XXXIX, 1904].

(6) Idem, *Gli enti astratti ecc.* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXI, ser. 5ª, 2° sem., 1912, pp. 667-682).

(7) Idem, *Sur les lois générales etc.* (International Congress of mathematicians, Cambridge 1912).

*operatori* <sup>(3)</sup> <sup>(7)</sup> per le grandezze. Questo carattere dei  $Q_0$ , che è stato precisato con le moderne ricerche logico-matematiche, ha origine antichissima, come lo provano, fra altro, il *rapporto* di Euclide e il concetto, più moderno, di *misura*, al quale vien collegata la frase erronea *numero concreto* e la frase inutile *numero astratto*. Di più: nelle *applicazioni* della matematica, i numeri compariscono non perchè numeri, ma perchè *misure di grandezze* sulle quali effettivamente si *deve* operare. Ora: definiti gli  $N_0, R_0, Q_0$ , in modo anche logicamente perfetto, come *enti a sè*, non è fatto tutto; occorre *collegarli con le grandezze*. Ed ecco, secondo me, il capitale difetto *logico* e *pratico* dei metodi ordinari; *dover collegare i  $Q_0$  alle grandezze*, mentre i  $Q_0$  hanno ragione di esistere solo perchè, *dati dalle grandezze, servono a rappresentare queste in modo univoco e reciproco*.

Ho tentato altre volte <sup>(4)</sup> <sup>(5)</sup> di ottenere i  $Q_0$  dalle grandezze, senza però riuscire, sia ad evitare alcune complicazioni di forma, sia a far precedere la definizione dei  $Q_0$  (classe *generale* dei numeri) a quella delle classi (parziali)  $N_0, R_0$ . Credo di esser riuscito ora ad evitare ogni complicazione di forma e dedurre direttamente, in modo elementare (\*), la classe totale  $Q_0$  dalle grandezze, mantenendo ai numeri la *forma* e la *sostanza loro proprie da secoli*.

1. In tutto ciò che segue mi riferisco al contenuto dei nn. 1 e 2 (\*) della mia Nota <sup>(5)</sup>.

Interessa far notare che, essendo  $f$  una operazione per gli  $u$ , la frase «  $u$  è una classe di grandezze omogenee rispetto all'operazione  $f$  per gli  $u$  » significa che « per  $u$  ed  $f$  valgono le proprietà I-VIII del n. 2 della nota <sup>(5)</sup> »; e niente altro che questo. Ne segue che le I-VIII *non* sono postulati per le grandezze [cfr. <sup>(5)</sup>] e che l'*omogeneità* è carattere cumulativo di  $u$  e di  $f$  e non di  $u$  o di  $f$  soltanto (\*\*).

(\*) Immediatamente applicabile all'insegnamento. Il prof. S. Catania, al quale ho comunicato i risultati ottenuti, sta appunto preparando una esposizione sistematica della teoria delle grandezze e dei numeri, che, credo, potrà sostituire le altre trattazioni più complesse.

(\*) Nella 1-3 di <sup>(5)</sup> si ponga  $a \varepsilon [u - \text{Nul}(u, f)] f x$ , altrimenti non si può fare a meno della proprietà commutativa di  $f$ . Inoltre, come mi ha fatto osservare il prof. Catania, alle I-VIII del n. 2 occorre aggiungere la VII' seguente

$$x, y \varepsilon u - \text{Nul}(u, f) \cdot y \varepsilon \theta(u, f) \cdot x \cdot \underline{\cap}_{x, y} \cdot x \varepsilon \theta(u, f) (x f y)$$

che è pure indipendente dalle altre I-VIII e che permette di affermare, senza far uso della proprietà commutativa di  $f$ , che per gli  $u$  vale il principio di Archimede.

(\*\*) La prima osservazione basta per risparmiare qualsiasi vuota discussione sulla *esistenza* delle classi di grandezze; la seconda prova che le frasi comuni «  $x$  è una classe di grandezze omogenee », «  $a, b$  sono grandezze omogenee », sono, per il significato da noi dato a *Grand  $f$* , del tutto prive di significato, poichè non contengono l'operazione rispetto alla quale esiste l'omogeneità.

In ciò che segue — e non ripeteremo tale ipotesi — supponiamo che  $u$  sia una classe di grandezze omogenea rispetto ad una operazione (somma) che, per seguire l'uso comune, indicheremo col segno  $+$ . Inoltre intenderemo introdotti, mediante il  $\theta$  di <sup>(5)</sup>, i segni  $>$ ,  $<$  e  $l^1$  (limite superiore) (\*\*\*) e sottintenderemo gli indici  $u$ ,  $+$  ai simboli  $\theta$ ,  $Nul$ , ecc., per semplificare la scrittura, salvo a porli esplicitamente quando la notazione abbreviata possa dar luogo ad equivoci. L'unico elemento di  $u$ , che è nullo rispetto all'operazione  $+$  <sup>(5)</sup>, lo indicheremo con 0 (zero).

2. Tra gli operatori per gli  $u$  giova considerare subito quello *nullo*, che indicheremo con 0 (*zero*, come l'elemento di  $u$  che è nullo rispetto a  $+$ ) e l'*identità*, che indicheremo con 1 (*uno*);

$$[1] \quad 0 = \iota [ufu \cap \alpha x \{x \varepsilon u \cdot \supset_{\alpha} \cdot \alpha x = 0\}]$$

$$[2] \quad 1 = \iota [ufu \cap \alpha x \{x \varepsilon u \cdot \supset_{\alpha} \cdot \alpha x = x\}],$$

e per semplicità non porremo l'indice  $u$  e  $+$  a 0 ed 1, come regolarmente dovrebbe farsi, perchè (n. 1)  $u$  e  $+$ , essendo *fissi*, possono essere *sottintesi*.

Esiste almeno un operatore  $\alpha$ , per gli  $u$ , tale che  $\alpha x = 0$ , ovvero  $\alpha x = x$ , perchè è stabilito, con *legge finita*, quale è l' $u$  che corrisponde ad un  $x$  di  $u$  fissato ad arbitrio. Tale operatore è anche *unico* <sup>(3)</sup>, perchè, se per  $\beta$  sono verificate le medesime condizioni, si ha indubbiamente  $\alpha x = \beta x$ , cioè  $\alpha = \beta$ , essendo  $x$  arbitrario. Segue dunque che:

$$[3] \quad 0, 1 \varepsilon ufu (*)$$

### 3. Con le notazioni complete

$$Q_0(u, +), N_0(u, +), R_0(u, +)$$

indicheremo, rispettivamente, le classi dei *numeri reali, interi, razionali*, che definiremo come *classi di operatori per gli  $u$  rispetto all'operazione  $+$* . Ma per semplificare (nn. 1, 2) la scrittura, nelle proposizioni [4]-[17] *sottintenderemo* gli indici  $u$ ,  $+$ , scrivendo semplicemente  $Q_0$ ,  $N_0$ ,  $R_0$ . In seguito (n. 8) le notazioni  $Q_0$ ,  $N_0$ ,  $R_0$ , *prive realmente degli indici  $u$ ,  $+$* , indicheranno delle *classi assolute*.

Definiamo la classe  $Q_0$ , ponendo

$$[4] \quad Q_0 = \iota [Cls' (ufu) \cap w \varepsilon \{$$

$$A. a, b \varepsilon u \cdot a = 0 \cdot \supset_{a, b} \cdot \{w \cap \alpha x (\alpha a = b)\} \varepsilon w \therefore$$

$$B. \alpha \varepsilon w \cdot a, b \varepsilon u \cdot \supset_{\alpha, a, b} \cdot \alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b \therefore$$

$$C. \alpha \varepsilon w : \supset_{\alpha} u - \iota 0 \cap x \varepsilon (\alpha x = x) : \alpha \varepsilon u - \iota 0 \cdot \supset_{\alpha, a} \cdot \alpha a = a \therefore$$

$$D. \alpha, \beta, \gamma \varepsilon w : \supset_{\alpha, \beta, \gamma} u - \iota 0 \cap x \varepsilon (\gamma x = \alpha x + \beta x) : \alpha \varepsilon u - \iota 0 \cdot \supset_{\alpha, \beta, \gamma, a} \cdot \gamma a = \alpha a + \beta a \} (*)].$$

(\*\*\*)  $x < y \cdot = \cdot x \varepsilon \theta y ; v \varepsilon Cls' u \cdot \supset \cdot l^1 v = \iota [u \cap x \varepsilon (\theta x = \theta v)]$ .

(\*) Si osservi che, mentre 0 dipende da  $u$  e da  $+$ , perchè dipende dall'elemento di  $u$  che è nullo rispetto a  $+$ , l'operatore 1 dipende soltanto da  $u$ .

(\*) A causa della B, non è facile (cfr. (1), ed. V, pag. 118) dimostrare la *indipendenza assoluta* delle A-D. Una eventuale dipendenza delle A-D non influisce sul procedimento usato in questa Nota per dedurre i  $Q_0$  dalle grandezze.

Vale a dire:  $Q_0$  è quella classe di operatori per gli  $u$  che, rispetto alla operazione  $+$ , soddisfa alle condizioni  $A-D$ . La  $A$  esprime che esiste un  $Q_0$ , ed uno solo, che trasforma un elemento  $a$  non nullo di  $u$  in un elemento  $b$  di  $a$ ; la  $B$  dice che ogni  $Q_0$  è operatore distributivo rispetto alla somma; le  $C, D$  esprimono che le condizioni  $\alpha x = x, \gamma x = \alpha x + \beta x$ , verificate per un  $x$  di  $u$  non nullo, sono vere per qualsiasi altro  $u$  non nullo. E queste sono proprietà elementari e ben note dei  $Q_0$ .

Nelle proposizioni [5]-[16] intendiamo *ammesso* che  $Q_0$  sia una classe univocamente determinata dalle condizioni  $A-D$  della [4]. In seguito, n. 7. dimostreremo che ciò avviene realmente.

Intanto si ha:

$$[5] \quad 0, 1 \in Q_0 (**).$$

4. La somma per i  $Q_0$  sarà indicata, come d'uso, col segno  $+$ , senza che vi sia pericolo di equivoco. Porremo:

$$[6] \quad \alpha, \beta \in Q_0 \cdot \cap \cdot \alpha + \beta =, [Q_0 \cap \gamma \in \{x \in u \cdot \cap \cdot \gamma x = \alpha x + \beta x\}];$$

e risulta subito:

$$[7] \quad \alpha, \beta \in Q_0 \cdot \cap \cdot \alpha + \beta \in Q_0:$$

cioè,  $+$  è una operazione per i  $Q_0$ .

È facilissimo dimostrare che per i  $Q_0$  definiti dalla [4], e l'operazione  $+$  definita dalla [6], valgono le proprietà I-VIII del n. 1. e quindi che

$$[8] \quad Q_0 \in \text{Grand } +,$$

cioè i  $Q_0$  formano una classe di grandezze omogenea rispetto all'operazione  $+$  definita dalla [6] (\*).

Dunque tutte le proprietà degli  $u$  che si possono dedurre dalla I-VIII valgono, e non vi è bisogno di altra dimostrazione, per i  $Q_0$ . Notevole economia di tempo.

5. L'intimo legame tra le classi  $u$ .  $Q_0$  è posto in piena luce dalle due proposizioni seguenti, ben note e importantissime:

$$[9] \quad a \in u - \iota 0 \cdot \cap \cdot u = Q_0 a,$$

(\*\*) Da  $B$  segue  $\alpha 0 = 0$ . Se per  $x = 0$  si ha  $\alpha x = 0$ , allora  $\alpha x = \alpha x + \alpha x$  e, per la  $D$ ,  $\alpha a = \alpha a + \alpha a$ , da cui  $\alpha a = 0$ . Ma da  $B$  risulta che esiste  $\alpha$  tale che  $\alpha x = 0$ : dunque ecc.

(\*) Per la dimostrazione della [8] giovano le proprietà seguenti:

- (a).  $\alpha \in Q_0 \cdot a \in u \cdot \cap \cdot \alpha a = 0 =: \alpha = 0 \cdot \cap \cdot a = 0$ ;
- (b).  $a, b \in u \cdot \alpha \in Q_0 - \iota 0 \cdot \cap \cdot a \supseteq b =: \alpha a \supseteq \alpha b$ ;
- (c).  $\alpha \in Q_0 \cdot \cap \cdot 0 + \alpha = \alpha$ ;
- (d).  $\alpha, \beta \in Q_0 \cdot a \in u - \iota 0 \cdot \cap \cdot \alpha a > \beta a =: \alpha \in (Q_0 - \iota 0) + \beta$ .

La (c) prova che l'operatore nullo, 0, è pure l'elemento di  $Q_0$  che è nullo rispetto alla operazione  $+$  definita dalla [6].



( $u$  è, rispetto all'operazione  $+$ , sistema lineare ad una dimensione);

$$[10] \quad \begin{cases} \alpha \varepsilon Q_0 - \iota 0 \cdot \supset \cdot \alpha u = u, \text{ oppure} \\ Q_0 - \iota 0 \supset (u f u) \text{ rcp} \end{cases}$$

(ogni  $Q_0$  non nullo è operatore univoco e reciproco per gli  $u$ ).

Per la dimostrazione della [10], e anche per le cose seguenti, giova ricordare che, essendo i  $Q_0$  operatori per gli  $u$ , il prodotto funzionale (?) di un  $Q_0$  per un altro è un  $Q_0$  univocamente determinato, che tale prodotto (\*) è associativo, e che  $0\alpha = \alpha 0 = 0$ ,  $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ . Se  $\alpha$  è un  $Q_0$  non nullo, dalla condizione  $\alpha\alpha = \alpha$  segue  $\alpha = 1$ , perchè da  $\alpha(\alpha x) = \alpha x$  segue  $\alpha = 1$ . Da  $\beta\alpha = 1$  segue  $\alpha\beta\alpha = \alpha$ , poi  $\alpha\beta\alpha\beta = \alpha\beta$  e quindi anche  $\alpha\beta = 1$ . Ora, da A e dalla [8] risulta che esiste un solo elemento  $\beta$  di  $Q_0$  tale che  $\beta\alpha = 1$ , o anche  $\alpha\beta = 1$ ; inoltre l'equazione  $\alpha x = a$  ha per soluzione, unica,  $x = \beta a$ , e quindi  $\beta$  è precisamente l'operatore inverso di  $\alpha$  (e la [10] è così dimostrata) che indicheremo, come d'uso, con  $\alpha^{-1}$  senza che, per ora, si dia ad 1 il significato stabilito dalla [2] (\*\*).

6. Definiamo ora la classe  $N_0$  seguendo Peano (1) o Pieri (2), non più mediante postulati, ma bensì con definizione nominale che dà la legge di formazione degli  $N_0$  mediante 0 ed 1 nella classe  $Q_0$ .

$$[11] \quad N_0 = \iota [C l s \{ Q_0 \cap v s \{ 0 \varepsilon v : 1 + v \supset v : w \varepsilon C l s \{ v \cdot 0 \varepsilon w \cdot 1 + w \supset w \cdot \supset w \cdot w = v \} 1 \} ] \quad [\text{Peano (1)}].$$

$$[11'] \quad N_0 = \iota [C l s \{ Q_0 \cap v s \{ 0 \varepsilon v : 1 + v \supset v : w \varepsilon C l s \{ v \cdot \supset w \cdot \supset w \cdot (1 + w) \} ] \quad [\text{Pieri (2)}].$$

Nella [11] la condizione  $0 \varepsilon N_0 : 1 + N_0 \supset N_0$  dice che i  $Q_0$ , formati con 0 ed 1 soltanto,

$$(a) \quad 0, 1 + 0, 1 + 1 + 0, 1 + 1 + 1 + 0, \dots \dots,$$

appartengono tutti alla classe  $N_0$ ; inoltre la condizione

$$w \varepsilon C l s \{ N_0 \cdot 0 \varepsilon w \cdot 1 + w \supset w \cdot \supset w \cdot w = N_0$$

dice che con la legge (a) si ottengono tutti e soli gli  $N_0$ .

(\*) Se  $\alpha, \beta$  sono  $Q_0$ , operatori a sinistra per gli  $u$ , indico brevemente con  $\beta\alpha$  il prodotto funzionale di  $\alpha$  per  $\beta$ . Però tale notazione abbreviata non è regolare e può condurre ad assurdi [cfr. (7), n. 13]; mentre è regolarissima (ibid., n. 12) la notazione  $\alpha\alpha$ , ove  $a$  è un  $u$ . Per il segno esplicito di prodotto funzionale dei  $Q_0$  si dovrà far uso del segno  $\times$  poichè (n. 9) il prodotto funzionale dei  $Q_0$  è niente altro che il loro prodotto aritmetico.

(\*\*) Per il rapporto di Euclide si ha

$$a, b \varepsilon u \cdot a = 0 \cdot \supset b/a = \iota \{ Q_0 \cap \alpha \varepsilon [\alpha a = b] \}$$

e da A risulta che  $b/a \varepsilon Q_0$ . In virtù della [8], la proposizione precedente definisce anche il rapporto tra un  $Q_0$  e un altro non nullo, e si ha  $\beta/\alpha = \alpha^{-1}\beta$ ,  $1/\alpha = \alpha^{-1}$ .

Il procedimento seguito in questa Nota per dedurre i  $Q_0$  dalle grandezze è dunque, in sostanza, il metodo dei rapporti di Euclide, reso più agile dalla mancanza degli  $N_0$  e dalla presenza degli operatori; inoltre è precisato logicamente.

Lo stesso dice la [11'] quando, come ha fatto Pieri, si deduca dalla [11'] il *principio d'induzione* che è esplicitamente contenuto nella [11] e dà, anzi, la legge *finita* (\*) di formazione degli  $N_0$ .

Segue subito che:

$$[12] \quad N_0 \varepsilon \text{Cls}' Q_0.$$

Definiamo la classe  $R_0$ , ponendo (n. 5)

$$[13] \quad R_0 = (N_0 - \iota 0)^{-1} N_0;$$

e dalla [12] e dal n. 5 si ha subito

$$[14] \quad R_0 \varepsilon \text{Cls}' Q_0 (*).$$

Dimostrato il principio di Archimede [cfr. (\*), 38·1], e dimostrato che ogni  $Q_0$  è compreso tra due  $N_0$  consecutivi (non escluso l'estremo minore), si ha:

$$[15] \quad \alpha \varepsilon Q_0 \cdot \alpha = 1^1 \{R_0 \cap (\theta \alpha \cup \iota \alpha)\} (**),$$

dalla quale risulta

$$[16] \quad Q_0 = 1^1 \{\text{Cls}' \text{Lim } R_0\},$$

cioè che la classe  $Q_0$  è costruibile mediante classi limitate ed esistenti di  $R_0$  e il limite superiore (\*\*\*).

7. Gli operatori 0, 1 per gli  $u$  sono univocamente determinati (n. 2), anche indipendentemente dalle condizioni A-D. Una volta ammesso che le A-D individuino una, ed una sola, classe  $Q_0$ , risulta, [11], che la classe  $N_0$  è EFFETTIVAMENTE COSTRUIBILE mediante 0, 1, + con legge finita; con legge parimente finita è COSTRUIBILE, [13], la classe  $R_0$ , e, mediante questa, [15], è EFFETTIVAMENTE COSTRUIBILE la classe  $Q_0$ , sempre mediante 0, 1, +, la classe  $u$  e l'operazione + per gli  $u$ .

(\*) Le leggi [11], [11'] sono *equivalenti* perchè l'una è deduttibile dall'altra (\*); ma la [11'] è *finita*, e quindi è pure *finita* la [11]. Il *ragionamento per induzione* è dunque *ragionamento finito*, e il *principio d'induzione* caratterizza le *classi finite*, contrariamente all'opinione di Poincaré accettata da alcuni anche in Italia.

(\*) L'operatore inverso dell'identità è pure l'identità: e quindi  $N_0 \cap R_0$  senza bisogno di nuove *convenzioni*, antilogiche sempre perchè conducono ad *identificare enti essenzialmente distinti*.

(\*\*) Come legame tra gli  $u$  e i  $Q_0$  si ha

$$\alpha \varepsilon Q_0 \cdot \alpha \in \text{Cls}' R_0 \cap v \varepsilon \{x \varepsilon u \cdot \alpha x = 1^1(vx)\}.$$

(\*\*\*) Allo stesso risultato si giunge, sebbene sotto forma più complessa e punto chiara, anche quando ci si ostini a voler far uso delle *pesanti* e *antiestetiche classi continue*, in luogo del concetto semplice chiaro ed elegante di *limite superiore*.

Dunque: *mediante le condizioni A-D è possibile di COSTRUIRE EFFETTIVAMENTE, una, ed una sola, classe di operatori per gli  $u$  rispetto a  $+$ , che soddisfa, [15], alle condizioni A-D.* Ne segue che: *la [4] definisce una, ed una sola, classe  $Q_0$  rispetto ad  $u$  e  $+$ , cioè che*

$$[17] \quad Q_0 \varepsilon \text{Cls}'(u f u).$$

8. Torniamo a porre il segno generico  $f$  in luogo del segno speciale  $+$  per gli  $u$ , riserbando questo, definito dalla [6], per i  $Q_0$ . Alla notazione abbreviata  $Q_0$  (n. 3) sostituiamo quella completa  $Q_0(u, f)$ ; e lo stesso facciamo per  $N_0$  ed  $R_0$ . Inoltre indichiamo con  $u'$  una classe di grandezze omogenea rispetto all'operazione  $f'$ , e con  $0'$  l'elemento di  $u'$  che è nullo rispetto ad  $f'$ .

Se  $\alpha$  è un  $N_0(u, f)$  e  $x$  è un  $u$ , risulta, dalle cose precedenti, che  $\alpha x$  è formato, nella classe  $u$ , mediante  $0, x, f$ , come  $\alpha$  è formato, nella classe  $Q_0(u, f)$ , mediante  $0, 1, +$ . Se  $x'$  è un  $u'$ , la notazione  $\alpha x'$  è attualmente priva di significato perchè  $\alpha$  non è un  $Q_0(u', f')$ . Noi converremo di indicare con  $\alpha x'$  quell'elemento di  $u'$  che è formato, nella classe  $u'$ , mediante  $0', x', f'$ , come  $\alpha x$  è formato, nella classe  $u$ , mediante  $0, x, f$ , cioè come  $\alpha$  è formato, nella classe  $Q_0(u, f)$ , mediante  $0, 1, +$  (\*).

E tale convenzione è lecita, perchè l'indicata formazione di  $\alpha x$  nella classe  $u$  dipende esclusivamente dalle proprietà I-VIII di  $u$  ed  $f$ , proprietà che NON VARIANO col variare di  $u$  ed  $f$ .

In base a tale convenzione, e alla permanenza delle I-VIII, possiamo indicare, come d'uso, con i simboli  $0, 1, 2, 3, \dots$ , assoluti, cioè indipendenti da  $u$  e da  $f$ , gli elementi della classe  $N_0(u, f)$ . Allora  $0, 1, 2, 3, \dots$  formano una classe assoluta,  $N_0$ , di operatori per  $u, f$  arbitrari. Dalla [13] risulta che, mediante la classe assoluta  $N_0$ , si ottiene la classe, pure assoluta  $R_0$ . Inoltre, se osserviamo che nella [15] la classe  $R_0 \cap (\theta \alpha \cup i \alpha)$  è unica, allora dalla [16] risulta che  $R_0$  dà la classe assoluta  $Q_0$  di operatori per  $u, f$  arbitrari (\*).

9. Se  $\alpha, \beta$  sono  $N_0$ , si prova facilmente <sup>(1)</sup> che  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  e che  $\beta \alpha = \alpha \beta$ ; da questo e da [13], [16] risulta che per la somma e per il

(\*) Per un'altra forma mediante corrispondenza ordinata, cfr. la mia Nota <sup>(2)</sup> n. 4. La forma del testo è più semplice.

(\*) Ottenuta così la classe assoluta  $Q_0$ , e se  $\alpha$  è un suo elemento qualunque, allora, purchè si operi in una classe  $u, f$ , omogenea,  $\alpha x$  è un  $u$  determinato. Ma se insieme con  $x$  non son dati  $u$  ed  $f$  (n. 1), allora  $\alpha x$  è notazione priva di significato. Come pure se  $u$  è omogeneo rispetto a due operazioni distinte  $f, f'$ , allora  $\alpha x$  indica due elementi distinti, uno in  $u, f$ , l'altro in  $u, f'$ .

La questione « se esiste un'operazione  $f$  per gli  $u$  soddisfacente alle I-VIII, può esserle un'altra  $f'$  diversa da  $f$ ? » può avere interesse in sè, ma non ne ha per la teoria generale delle grandezze e dei  $Q_0$ . A questo proposito ritengo dubbie le ultime due proposizioni della mia Nota <sup>(3)</sup>.

*prodotto funzionale* dei  $Q_0$  vale la proprietà *commutativa*. Se  $a, b$  sono elementi arbitrari di  $u$ , allora, fissato  $c$  non nullo di  $u$ , si ha  $a = \alpha c, b = \beta c$ , da cui

$$a + b = \alpha c + \beta c = (\alpha + \beta)c = (\beta + \alpha)c = \beta c + \alpha c = b + c$$

e quindi risulta, come ha già dimostrato il sig. Huntington <sup>(5)</sup>, che la proprietà commutativa della somma delle grandezze è conseguenza delle I-VIII.

Infine è ovvio che il *prodotto funzionale* dei  $Q_0$  coincide con l'ordinario *prodotto aritmetico*, e che l'operatore  $\alpha^{-1}$ , *inverso* di  $\alpha$ , coincide con l'ordinario *reciproco* di  $\alpha$ .

In tal modo, senza ricorrere all'iper-logica e a classi di classi, è possibile ottenere in modo semplice rapido e rigoroso i numeri reali nella *forma e sostanza abituale e loro propria da secoli*, ed inoltre ottenerli già collegati con le grandezze perchè dedotti da queste.

**Matematica.** — *Formole di derivazione funzionale.* Nota II di E. DANIELE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

4. Riferendoci per le notazioni ed i simboli alla Nota pubblicata nel fascicolo precedente di questi Rendiconti col medesimo titolo, possiamo supporre che la funzione  $\varphi$  del n. 3 contenga, oltre alla variabile  $x$ , un parametro  $\alpha$ ; sia cioè

$$(4) \quad F = F[\varphi(x|\alpha)] \quad , \quad \varphi(x|\alpha) = \varphi[\psi(\xi), x|\alpha](\psi(x)) \quad ,$$

per cui  $F$  si potrà considerare come dipendente da tutti i valori di  $\psi(\xi)$  fra 0 e 1, ed inoltre dal parametro  $\alpha$ . Vogliamo calcolare la derivata (ordinaria) di  $F$  rispetto ad  $\alpha$ . Si ha:

$$\varphi(x|\alpha + \Delta\alpha) = \varphi(x|\alpha) + \Delta\alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) ,$$

indicando con  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)$  il valore di  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$  per un valore conveniente di  $\alpha$ . Inoltre, se  $F[\varphi]$  non ha punti eccezionali, e se  $\Delta\alpha$  è supposto infinitesimo,

$$\delta F = \int_0^1 F'[\varphi(x|\alpha), y] \delta \varphi(y|\alpha) dy .$$

Sostituendo a  $\delta \varphi$  l'espressione dedotta dalla formola precedente, e dividendo ambo i membri per  $\Delta\alpha$ , si ottiene:

$$(IV) \quad \frac{\partial F[\psi(\xi), \alpha]}{\partial \alpha} = \int_0^1 F'[\varphi(x|\alpha), y] \frac{\partial \varphi(y|\alpha)}{\partial \alpha} dy .$$



Come esempio prendiamo

$$(4') \quad \varphi(x|\alpha) = \int_0^1 \lambda(x, \xi|\alpha) \psi(\xi) d\xi + \psi(x);$$

l'applicazione della (IV) ci fornisce:

$$(IV') \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_0^1 F' |[\varphi(x|\alpha), \xi]| d\xi \int_0^1 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta|\alpha)}{\partial \alpha} \psi(\eta) d\eta,$$

e questa coincide con una formola trovata direttamente dal prof. Volterra nel n. 3 della Nota dianzi citata, dove la  $F|[\varphi(x|\alpha)]$ , con  $F$  funzione arbitraria e  $\varphi(x|\alpha)$  data dalla (4'), è la soluzione di una certa equazione alle derivate funzionali.

5. Il sistema

$$(5) \quad \begin{cases} F(x) = F|[\varphi_0^1, x]| \\ \varphi(\xi) = \varphi(f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)), \end{cases}$$

mediante il quale si fa dipendere  $F$  da tutti i valori di  $f(\xi)$  fra 0 e 1, è affine a quello formato dalle (1). Noi supponiamo  $F|[\varphi]$  priva di punti eccezionali. Volendo la derivata di  $F$  rispetto ad  $f$ , osserveremo intanto che si ha:

$$\delta \varphi = \sum_{r=0}^n \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(r)}} \delta f^{(r)},$$

e se noi assumiamo  $\delta f$  sempre nulla fra 0 e 1 eccetto che in un intervallo  $(\mu \nu)$ , la stessa cosa accadrà per  $\delta \varphi$ .

D'altra parte si ha:

$$\delta F = \int_{\mu}^{\nu} F' |[\varphi(\xi), x, \eta]| \delta \varphi(\eta) d\eta;$$

sostituendo colla formola precedente ed eseguendo trasformazioni ben note, si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_{\mu}^{\nu} \delta f(\eta) \left\{ F' |[\varphi(\xi), x, \eta]| \frac{\partial \varphi}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( F' \frac{\partial \varphi}{\partial f'} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \eta^n} \left( F' \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(n)}} \right) \right\} d\eta + \left( \sum_{i=0}^{n-1} p_i \frac{\partial^i \delta f}{\partial \eta^i} \right)_{\mu}^{\nu}, \\ p_i &= \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^{n-r-i} \frac{\partial^{n-r-i}}{\partial \eta^{n-r-i}} \left( F' |[\varphi(\xi), x, \eta]| \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(n-r+1)}} \right). \end{aligned}$$

Col tendere di tutti i punti di  $(\mu \nu)$  a  $\xi_1$ , la differenza  $\left( \sum_{i=0}^{n-1} \right)_{\mu}^{\nu}$  si annulla

per la continuità, che noi supponiamo, delle funzioni considerate, e si giunge così alla formola :

$$(V) \quad F'[\varphi(\xi), x, \xi_1] = \left[ F'[\varphi(\xi), x, \eta] \frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( F' \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \eta^n} \left( F' \frac{\partial \varphi}{\partial \eta^n} \right) \right]_{\eta=\xi_1}.$$

La condizione che la  $F[\varphi]$  sia priva di punti eccezionali non è essenziale per la validità della (V). Se per es. si considera

$$(5') \quad F(x) = F[\varphi(\xi), x](\varphi(x)),$$

per modo che si abbia

$$\delta F = \int_0^x F'[\varphi(\xi), x, \eta] \delta \varphi(\eta) d\eta + a \delta \varphi(x),$$

eseguendo la variazione di  $\varphi$  in un intervallo  $(\mu, \nu)$  interno al tratto  $(0, x)$ , l'  $\int_0^x$  si ridurrà a  $\int_\mu^\nu$ , mentre il termine  $a \delta \varphi(x)$  s'annulla.

Pertanto la (V) vale ancora per la  $F$  definita dalla (5'), alla sola condizione che il punto  $\xi_1$ , in cui si calcola la derivata di  $F$ , non coincida con  $x$ .

**Meccanica.** — *Nuove osservazioni teoriche sull'irraggiamento nero.* Nota del dott. CINO POLI, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Quando in una cavità chiusa, a pareti perfettamente riflettenti, sia contenuto un corpo a temperatura costante e uniforme  $T$ , la densità  $u(\nu, T)$  dell'energia raggiante di frequenza  $\nu$  è pure costante e indipendente dalla natura del corpo che si considera, e, secondo Planck <sup>(1)</sup>, vale

$$(1) \quad u(\nu, T) = \frac{8 \pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

essendo  $h$  una costante universale di significato fisico non ancora precisato, e  $\frac{3}{2} k T$  l'energia cinetica molecolare media di un gas perfetto alla temperatura assoluta  $T$ .

Come è noto, questa relazione, che è in ottimo accordo coll'esperienza, è stata dal Planck dimostrata con ipotesi estranee, ed anzi incompatibili coi

(1) Max Planck, *Theorie der Wärmestrahlung*. Leipzig, 1906, pag. 157.

principi della dinamica classica <sup>(1)</sup> ed è opinione generalmente accettata <sup>(2)</sup> che essa non si possa ottenere col solo ausilio di questi ultimi.

Mi propongo invece di dimostrare che questa incompatibilità non esiste, poichè si può immaginare per la emissione un meccanismo conforme alle teorie classiche, per il quale si dimostra facilmente la formula di Planck. Chiuderò quindi la Nota con qualche osservazione sul significato e sul valore teorico di tali meccanismi.

2. Secondo le ipotesi fisiche generalmente accettate, l'irraggiamento di un corpo è prodotto dal moto di particelle elettrizzate contenute nel corpo stesso in numero enorme, e che nel sèguito indicherò brevemente col nome di ioni. Questi moti sono strettamente connessi alla natura fisica e chimica del corpo, cioè alla sua costituzione molecolare, atomica ed interatomica; possono dunque essere affatto diversi da corpo a corpo; ma se si suppone che questo sia circondato completamente da una superficie riflettente, essi divengono vincolati inoltre dalla condizione di non turbare l'equilibrio termico, nè quello elettromagnetico. Vale a dire che nel corpo nero il moto degli ioni, il quale influisce certamente sui moti molecolari (come è dimostrato dal fenomeno dell'assorbimento, per il quale energia elettromagnetica si trasforma, per l'intervento degli ioni stessi, in energia termica, cioè energia cinetica molecolare), deve esser tale da non alterare la distribuzione dell'energia molecolare che è richiesta dall'uniformità della temperatura; ed inoltre la quantità totale di energia elettromagnetica posseduta dagli ioni dovrà restare costante, poichè tale rimane quella presente nello spazio ambiente, come quella cinetica totale delle molecole.

Se dunque voglio costruire un meccanismo irraggiante, se cioè voglio immaginare che i moti degli ioni nel corpo nero siano di una data natura, dovrò curare di soddisfare alle condizioni suesprese.

Per quanto riguarda la costanza dell'energia totale degli ioni, supporrò addirittura che sia costante l'energia di ogni singolo ione. Questa ipotesi, assai più restrittiva del necessario, farà sì che il mio corpo fittizio non avrà riscontro nella realtà; ma ciò non importa per lo scopo che mi propongo, per il quale basta invece che le mie ipotesi non escano dal campo delle teorie classiche.

Per la condizione relativa all'equilibrio termico, ammetterò semplicemente che la legge dell'equipartizione dell'energia, quale si dimostra nella teoria cinetica dei gas, si applichi anche ai sistemi di molecole e di ioni, analogamente a quanto si fa nella teoria di Drude della conducibilità nei metalli. Sarà bene che faccia osservare subito, esplicitamente, che questo modo di estendere il teorema dell'equipartizione è radicalmente differente

<sup>(1)</sup> Intendendo, con questo nome, tanto la meccanica delle masse, quanto le teorie elettriche di Maxwell e Lorentz.

<sup>(2)</sup> Cfr. *La théorie du rayonnement et les quanta*. Paris, 1912, *passim*.

da quello usato da Rayleigh, Jeans e Lorentz, e che conduce alla formula

$$(2) \quad u(\nu, V) = \frac{8\pi k \nu^2 T}{c^2}$$

in disaccordo coll'esperienza.

In questo ultimo metodo si equipartisce, se mi è lecito dire, anche l'energia raggianti, mentre questa non interviene affatto nell'ipotesi che io intendo applicare. È appunto questa modificazione sostanziale nel modo di intendere l'equipartizione, che permette di sfuggire alla formula di Rayleigh.

3. Con le due assunzioni fatte, sono senza altro in grado di ottenere la formula di Planck. Per semplificare i calcoli, supporrò ancora che ioni mobili abbiano solo cariche negative, e che possano solo oscillare rettilineamente intorno alla loro posizione di equilibrio.

Se allora chiamo  $q$  il momento di uno ione, cioè il prodotto della sua carica  $e$  per lo spostamento, la sua energia è della forma

$$(3) \quad E = K^2 q^2 + L^2 \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 ;$$

e poichè essa è per ipotesi costante, e quindi  $\frac{dE}{dt} = 0$ , ho

$$(4) \quad L^2 \frac{d^2 q}{dt^2} + K^2 q = 0 ,$$

ossia

$$(5) \quad q = q a \cos(2\pi \nu t - \vartheta) ,$$

essendo  $a$  l'ampiezza delle oscillazioni e

$$(6) \quad \nu = \frac{K}{2\pi L}$$

la frequenza.

Posso ammettere che il corpo sia perfettamente omogeneo, di modo che ogni ione si trovi nelle stesse condizioni, e quindi  $K$  ed  $L$  siano le stesse per tutti gli ioni.

Invece, per l'ampiezza delle oscillazioni, che è indipendente da  $K$  ed  $L$ , supporrò che sia maggiore per le cariche minori, e precisamente pongo

$$(7) \quad a^2 q = \text{cost.}$$

Si osservi che con questa ipotesi non si ammette affatto, come sembra a prima giunta, la possibilità di oscillazioni infinitamente ampie, poichè secondo la teoria degli elettroni,  $q$  non può essere inferiore alla carica elementare  $e$  dell'elettrone, e quindi  $a$  ammette un limite superiore finito.



Di più, non solo deve essere  $e \geq e$ , ma addirittura

$$(8) \quad e = m e \quad (m \text{ intero positivo});$$

per cui, invece di (7), si può scrivere

$$(9) \quad m a^2 = \text{cost},$$

dove  $m$  è il numero degli elettroni che costituiscono lo ione oscillante con l'ampiezza  $a$ .

Allora tenendo conto delle (5), (6), la (3) dà, per l'energia di uno ione costituito di  $m$  elettroni e oscillante con la frequenza  $\nu$ , il valore

$$(10) \quad E = m h \nu,$$

essendo

$$h = 2 \pi m a^2 e^2 L K$$

una costante che, in virtù di (9), è la stessa per tutti gli ioni.

La densità dell'energia raggiante di frequenza  $\nu$  dovrà essere tale da non alterare l'energia degli ioni della stessa frequenza. Ora Planck ha dimostrato <sup>(1)</sup> che, affinché l'energia media  $\bar{E}$  di un risonatore (cioè di uno ione oscillante periodicamente) di frequenza  $\nu$  rimanga costante, la densità  $u$  dell'energia raggiante deve essere

$$(12) \quad u = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \bar{E};$$

e si può ammettere che questa relazione valga anche nel nostro caso, quando l'energia media sia calcolata sull'insieme degli ioni di frequenza  $\nu$ , cioè dividendo per il loro numero la loro energia complessiva.

Infatti, siccome l'intensità dell'irraggiamento (che vale  $\frac{c u}{8 \pi}$ ) è uguale al rapporto fra il coefficiente di emissione e quello di assorbimento, ciò equivale ad ammettere che questi coefficienti in un punto del corpo, per una data frequenza, sono uguali alla media dei coefficienti analoghi dei singoli ioni; media che risulta uguale in tutti i punti, poichè la distribuzione delle varie specie di ioni in tutto il corpo si deve pensare non-ordinata (ungeordnet).

Rimane dunque da calcolare l'energia complessiva degli ioni di frequenza  $\nu$ : il che potrà fare valendomi dell'ipotesi posta al n. 2, che cioè valga anche per gli ioni la equipartizione dell'energia.

Essendo il corpo alla temperatura assoluta  $T$ , ad ogni grado di libertà spetta l'energia cinetica  $\frac{1}{2} \alpha T$ , detta  $\alpha$  la costante di Boltzmann. Ogni ione ha un solo grado di libertà: e poichè la sua energia, data dalla (3),

<sup>(1)</sup> loc. cit., pag. 124.

è precisamente il doppio della sua energia cinetica media, si è condotti ad assegnare ad ogni ione l'energia

$$E = \frac{2}{3} \alpha T = kT,$$

dove  $k$  è la stessa costante che compare nella (1).

Allora  $E$  risulta uguale per tutti gli ioni; e dalla (12) risulterebbe, senz'altro,

$$u = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT,$$

cioè la formula di Rayleigh.

Ma si deve osservare che questo modo di procedere non è esatto, poichè nella teoria cinetica dei gas si dimostra che non tutte le molecole posseggono esattamente l'energia  $\alpha T$ , ma che questo è solo il valore medio dell'energia molecolare, l'esatta ripartizione della quale è assegnata dalla nota legge di Maxwell. E così dovrò ammettere che vi sono ioni che posseggono energia differente da  $kT$ , e che precisamente il loro numero sarà dato dalla legge di Maxwell.

Il valore di  $\bar{E}$ , da introdurre nella (12), va calcolato per i soli ioni di frequenza  $\nu$ : e sarà precisamente

$$(13) \quad \bar{E} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^n m h \nu N_m,$$

detto  $N$  il loro numero totale, e  $N_m$  il numero di quelli che hanno l'energia  $m h \nu$ , cioè che sono costituiti da  $m$  elettroni. Se  $m$  variasse con continuità, la legge di Maxwell darebbe

$$N_m dm = -N de^{-\frac{m h \nu}{kT}};$$

ma siccome  $m$  non può essere che intero, sostituirò gli incrementi finiti ai differenziali, cioè

$$N_m \Delta m = -N \Delta e^{-\frac{m h \nu}{kT}},$$

vale a dire

$$(14) \quad N_m = N \left( e^{-\frac{m h \nu}{kT}} - e^{-\frac{(m+1) h \nu}{kT}} \right);$$

e quindi la (13) diviene

$$\bar{E} = h\nu \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-\frac{m h \nu}{kT}},$$

ossia

$$(15) \quad \bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1};$$

e quindi la densità dell'energia raggiante diventa

$$(16) \quad u(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{e^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

cioè si ottiene precisamente la formula di Planck.

4. Dunque, per l'irraggiamento di un corpo fittizio costituito nel modo spiegato al n. 2, è vera la formula di Planck; e poichè le ipotesi fatte non escono dal campo delle teorie classiche, e nella dimostrazione fatta nel n. 3 si ricorre solo ai principî della teoria elettromagnetica della luce di Maxwell, a quelli della teoria degli elettroni, e della teoria cinetica dei gas, rimane dimostrata la possibilità di ottenere la formula di Planck senza ipotesi dei *quanta*, o altre che contraddicano ai principî classici.

Siccome, insomma, l'intero sistema irraggiante immaginato ricade nel dominio del principio di Hamilton, mi pare che più non si possa asserire che esso conduca necessariamente alla formula di Rayleigh.

Questa asserzione — che, almeno nella forma così recisa che gli hanno dato alcuni scienziati <sup>(1)</sup>, era realmente prematura, e ora, mi pare di aver dimostrato, è certo erronea — è stata giustificata solamente dalla dimostrazione di H. A. Lorentz <sup>(2)</sup>, che è senza dubbio la più generale di tutte quelle finora date in base all'equipartizione. Ma essa non è completamente soddisfacente; in particolare, anch'essa porta ad equipartire l'*energia raggiante*. Ora io penso che ciò non sia conforme allo spirito della meccanica statistica; e questa mia modesta Nota avrà raggiunto il suo scopo se avrà almeno contribuito a far sorgere l'idea della possibilità di giungere a risultati conformi all'esperienza, applicando l'equipartizione in modo radicalmente diverso da quello seguito finora, applicandolo cioè esclusivamente a quella parte dell'energia che si può considerare come *cinetica*. Spero, del resto, di poter presto sviluppare maggiormente questa osservazione.

Mi sia infine permesso di rispondere ad un'ultima quistione: se cioè il calcolo, fatto in questa Nota, possa avere il significato di dimostrazione della (1). Vale a dire se esso, oltre a dimostrare che la (1) è compatibile col principio di Hamilton, dimostri anche che essa rappresenta proprio la densità dell'irraggiamento nero.

È noto che il Planck stesso dimostra la sua formula considerando un meccanismo di emissione affatto particolare, che non ha riscontro nella realtà fisica, e giustifica il procedimento osservando che, per la legge di Kirchhoff, la  $u$  è indipendente dalla costituzione del corpo. Potrei senz'altro far mia questa giustificazione; ma essa non è esente da una critica grave.

<sup>(1)</sup> P. es. Planck, in *Théorie du rayonn. et les quanta*, pag. 93.

<sup>(2)</sup> *Rapport sur l'applic. au rayonnement du théorème de l'équipartition de l'énergie*; ibid., pp. 12-39.

La dimostrazione della legge di Kirchhoff è basata sulla termodinamica; quindi vale per tutti e soli quei corpi reali o fittizi, pei quali è vera la termodinamica. Dunque solo pei corpi costituiti da un numero enorme di particelle in moto disordinato, chè altrimenti entropia e temperatura non hanno significato. Planck invece considera un solo risonatore; la legge di Kirchhoff non si applica più, e non permette di asserire che esso irraggia come un corpo nero. È vero che il Planck definisce l'entropia di un risonatore ma dalla sua definizione non risulta punto chiaro che essa sia proprio la stessa entropia della termodinamica, o, meglio, che l'estendere ad essa il secondo principio non sia una nuova ipotesi, ancor più essenziale, nel metodo di Planck, di quella dei *quanta*. Questa critica esporrò più ampiamente in un prossimo lavoro nel quale vorrei mostrare come non sia lecito parlare di entropia, probabilità, di concetti statistici in breve, per l'irraggiamento considerato a sè, indipendentemente dal corpo che lo determina.

Tornando alla quistione posta, mi pare che, invece, al corpo fittizio da me considerato si possa applicare la termodinamica, poichè esso è costituito appunto in armonia coi principj della meccanica statistica; e allora si può forse ritenere che i nn. 2 e 3 contengano una dimostrazione della formula di Planck per l'irraggiamento nero.

#### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei professori LOVISATO e MELI, e il vol. IV dell'opera del prof. B. HAYATA: *Icones Plantarum Formosanarum*.

Il Socio GRASSI offre il volume XIV degli *Atti* dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia redatti dal Socio BRIOSI, e parla della importanza di questa pubblicazione, ricca di interessanti lavori, dando notizia di quelli che nel volume attuale sono contenuti.

Il Presidente BLASERNA fa omaggio, a nome dell'autore prof. F. CALDARERA, della seconda edizione del primo volume del *Corso di Meccanica razionale*; lo stesso Presidente fa rilevare che trattasi di una edizione migliorata apparsa in questi giorni, della quale indica i principali capitoli, e che torna ad onore della ancor verde operosità del prof. CALDARERA.

#### MEMORIE

##### DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

F. NICITA. — *Il metodo aritmetico nel caso irriducibile dell'equazione di 3° grado*. Pres. dal Socio BLASERNA.



## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA dà il triste annuncio della morte del Socio nazionale GIOVANNI STRUEVER, mancato ai vivi il 21 febbraio 1915; apparteneva il defunto all'Accademia per la *Cristallografia e Mineralogia*, sino dal 16 giugno 1878.

Il Corrisp. GINO LORIA legge la seguente Commemorazione del compianto Socio prof. PLACIDO TARDY.

### I.

Fra le lettere che si scambiarono Leibniz e Giovanni Bernoulli durante l'anno 1695, meritano la più alta ammirazione quelle nelle quali è segnalata e svolta l'analogia formale che esiste fra le due operazioni *differenziazione* ed *elevamento a potenza*. Tale analogia, avvertita più tardi, per conto suo, anche da Lagrange, quando era ai primordii della sua carriera scientifica, fu la prima radice della teoria generale delle operazioni, che con tanto fervore e tanto successo venne coltivata, specialmente in Inghilterra, in sul principio del secolo scorso. La sorprendente disinvoltura, con la quale quei due sommi ragionavano e calcolavano, col mezzo di potenze ad indici qualunque, dei simboli di differenziazione e di integrazione, produce oggi meraviglia non minore del vedere come, circa nella stessa epoca, fosse familiare <sup>(1)</sup> un modo così generale di concepire le coordinate, da formare uno stridente contrasto con le nostre abitudini mentali, che ci tengono sempre strettamente avvinti al semplice concetto di coordinate cartesiane. Ma, lo ha osservato giustamente il Bailly, « il semble que les idées aient comme nous, une enfance et un premier état de faiblesse; elles ne produisent point à leur naissance, et elles ne tiennent que de l'âge et du temps leur vertu féconde » <sup>(2)</sup>. In conformità a tale legge che governa lo sviluppo del pensiero scientifico, la geniale idea di sottoporre i simboli di differenziazione ed integrazione all'operazione di elevamento a potenza con esponente qualunque, rimase per parecchi lustri inosservata, dimenticata o trascurata: spettava ad Eulero il riesumerla e fecondarla; spettava a Liouville, svolgerla ulteriormente in base a nuove vedute. Se non che, i risultati ottenuti dall'eminente geometra fran-

<sup>(1)</sup> La verità di tale asserzione è dimostrata, se non m'inganno, indiscutibilmente dall'*Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, pubblicata nel 1696 dal marchese de l'Hopital.

<sup>(2)</sup> *Histoire de l'astronomie moderne*, tom. II, Paris MDCCLXXIX, pag. 60.

cese parvero ad alcuni contenere qualche elemento arbitrario non accettabile, onde non riscossero la generale approvazione dei dotti. In conseguenza, quando nel settembre 1845 gli scienziati italiani si riunirono per la sesta volta a congresso in Milano, un giovane matematico siciliano scelse i differenziali ad indice fratto come soggetto di una comunicazione [3] <sup>(1)</sup> intesa ad indurre i geometri ad occuparsi di proposito di tale importante argomento. Avendo egli chiesto il giudizio dei colleghi sopra le proprie ricerche, Gabrio Piola e Giovanni Plana, che godevano allora di una autorità altissima, per incarico avutone, lessero una Relazione <sup>(2)</sup> in cui riconoscevano indiscutibile l'importanza del tema trattato e, facendo qualche riserva intorno ad alcune idee dell'autore, auguravano gli fosse riserbata la palma destinata a colui che riuscisse a fare piena luce sopra un argomento la cui metafisica era tuttora controversa.

Probabilmente a cagione dei dubbi manifestati in tale Rapporto, il lavoro in questione rimase per ben quattordici anni inedito; soltanto nel 1858, dopo di avere subito radicali migliorie, venne inserito nel volume inaugurale della nuova serie degli *Annali di matematica*. Nè, dopo tale pubblicazione l'autore abbandonò del tutto l'interessante soggetto; chè, dieci anni dopo, vi dedicò una nuova pubblicazione di indole specialmente storica [15], che, meglio ancora della precedente, ebbe la virtù di richiamare l'attenzione dei matematici <sup>(3)</sup> sopra un soggetto importante in sè stesso ed interessante, non foss'altro, per essere uno dei pochissimi in cui le opinioni dei competenti si manifestarono discordi.

Ma nel periodo che corre fra il 1844 ed il 1868, il giovane compatriota di Maurolico, che aspettava trepidante il giudizio di coloro che egli venerava come maestri, aveva fatto la propria strada nel mondo; non soltanto veniva trattato come loro pari da scienziati del valore di un Betti, di un Bellavitis, di un Genocchi, ma si trovava alla testa di un Istituto d'istruzione superiore: cioè dell'Ateneo di cui mi reco ad onore di esprimere l'ammirazione per l'altezza della mente dell'antico suo duce, la gratitudine per la sua munificenza esemplare <sup>(4)</sup>, il cordoglio per la sua scomparsa, nel mentre mi accingo ad esporne brevemente la vita ed a farne risaltare le benemerienze scientifiche.

<sup>(1)</sup> I numeri in parentesi quadrata servono di richiamo ai lavori indicati nell'*Elenco* che chiude la presente *Commemorazione*.

<sup>(2)</sup> Atti della sesta Riunione degli scienziati italiani, pagg. 90-91.

<sup>(3)</sup> Ved. l'articolo di G. Borchardt, *Sur quelques passages des lettres de Leibniz relatifs aux différentielles à indices quelconques* (Bulettno di Boncompagni, tom. II, an. 1869, pagg. 277-278; oppure C. W. Borchardt's *Gesammelte Werke*, Berlin, an. 1888, pagg. 486-487).

<sup>(4)</sup> Alla Facoltà matematica dell'Università di Genova Egli ha legato la sua ricchissima biblioteca matematica.

## II.

Placido Tardy nacque a Messina il 23 ottobre 1816, da una famiglia originaria della Francia <sup>(1)</sup>. Esauriti gli studi che potevano compiersi nella sua città natale, si recò a Lucca per frequentarvi quel Collegio: dell'interesse che egli allora provava per gli studi matematici fa fede un breve articolo [1] con cui egli volle richiamare l'attenzione dei conterranei sopra un lavoro di un giovane siciliano, oggi del tutto dimenticato. Nell'autunno del 1837 passò a Milano, con l'intenzione di perfezionarsi ulteriormente sotto la direzione del matematico Gabrio Piola e dell'astronomo Paolo Frisiani; del suo profitto fanno fede due bellissimi attestati, dai quali risulta che quei due valentuomini concepirono le più liete speranze sull'avvenire del loro alunno: nè va taciuto che l'influenza del primo di essi è visibile nella miglior parte delle pubblicazioni scientifiche del Tardy. Da Milano, nel 1838, passò a Parigi ed ivi ascoltò le lezioni di Liouville e Poisson; raccomandato dal Mossotti a Guglielmo Libri, che in quell'epoca era all'apogeo della gloria e della potenza, stabilì con lui relazioni di amicizia che continuarono anche dopo la fuga a Londra ed il ritorno in Toscana del famigerato storico delle scienze matematiche in Italia.

Restitutosi in patria, da Ferdinando II re di Napoli, con decreto del 22 novembre 1841, veniva « nominato professore di matematica sublime nella regia Università degli studi di Messina » <sup>(2)</sup>; ivi diede alla luce il suo primo lavoro originale [2]; ivi accolse il Lejeune-Dirichlet durante lo storico viaggio compiuto dal sommo matematico tedesco in compagnia di Jacobi e di Steiner. Ma, dopo i tumulti verificatisi a Reggio-Calabria e Messina nel 1847, quasi a preludio delle rivoluzioni che divamparono in Europa nell'anno successivo, ritornata la Sicilia dolorante sotto l'aborrito giogo borbonico, il Tardy, che a quei moti non era rimasto estraneo, abbandonò una cattedra ed un soggiorno che non erano di sua soddisfazione <sup>(3)</sup> e riparò a Firenze. Devesi però ritenere che la sua partecipazione a quella rivolta sia stata modesta, dal momento che il sospettoso Governo napoletano non lo molestò in alcun modo durante le visite che egli fece regolarmente al proprio padre durante i mesi di autunno degli anni seguenti e giunse perfino a far pratiche (1854) perchè egli riprendesse il suo ufficio nel pubblico insegnamento.

(1) Il padre, Antonio, fu distinto ingegnere; mi si assicura che una chiesa eretta sotto la sua direzione è uno dei rari edifizi che si salvarono dall'immane disastro che distrusse Messina nel 1908.

(2) Un manoscritto, tuttora esistente, portante la data del 2 marzo 1846, mostra che la Meccanica analitica fu uno dei soggetti delle lezioni del giovane professore.

(3) Ragione precipua del suo malcontento era lo stato miserrimo della pubblica biblioteca di Messina, del quale egli fa cenno in un passo di uno dei suoi primi lavori [2].

A Firenze il Tardy, mentre si dedicava a ricerche scientifiche, si adoperò per ottenere una cattedra; riusciti vani gli sforzi da lui fatti per ottenere un posto allora scoperto nell'Università di Bologna, e quelli del Plana per farlo eleggere professore nell'Accademia militare di Torino, il Tardy, in sul principio dell'anno scolastico 1850-51, si trasferì a Genova in qualità di professore di matematica in quel ginnasio. Un anno dopo, Camillo Cavour, allora ministro della marina agricoltura e commercio, lo nominò (lettera del 13 dicembre 1851) professore di geometria analitica e di calcolo infinitesimale in quella regia Scuola di marina; di tale Istituto egli fu anche direttore degli studi a partire dal 1854 e nel 1868 v'insegnò pure la meccanica razionale <sup>(1)</sup>.

Il carteggio, tenuto in questo periodo di tempo dal Tardy con i più eminenti matematici italiani del tempo, sta a provare la grandissima stima che essi nutrivano per il suo ingegno, per il suo carattere, per la sua cultura; da esso, fra l'altro, risulta che la sua casa, sempre ospitale, venne scelta nella primavera del 1858 come sede di un piccolo convegno, al quale parteciparono Betti, Brioschi e Genocchi, col precipuo scopo d'imprimere nuova vita al periodico di matematica fondato otto anni prima e costantemente diretto dal Tortolini. In tale minuscolo congresso vennero gettate le basi degli *Annali di matematica pura ed applicata* che da mezzo secolo sotto l'oculata direzione prima del Tortolini, poi del Brioschi ed ora del Dini, esercitano la più salutare influenza sopra lo sviluppo delle scienze esatte nella nostra patria. La parte presa dal Tardy in questo memorabile avvenimento non è generalmente nota, ma venne riconosciuta nel modo più esplicito in un'occasione solenne: adunatosi, sullo scorcio di settembre del 1887, il primo Congresso universitario, i matematici che vi parteciparono, riunitisi a fraterno banchetto per onorare il Brioschi, prima di separarsi, spedirono per telegramma al Tardy un « saluto riconoscente ai fondatori degli Annali, primo segno del risorgimento degli studi matematici in Italia ».

Resasi vacante la cattedra di analisi infinitesimale nell'Università di Genova, il Tardy fu chiamato ad occuparla con regio decreto del 19 ottobre 1859, in seguito a parere favorevole pronunziato da una Commissione di cui facevano parte Genocchi, Menabrea, Richelmy e Sella; nè volle più

(1) Fra gli innumerevoli discepoli che ebbe il Tardy, mi piace ricordare un noto scrittore di cose marinare, A. V. Vecchi (Jack la Bolina), il quale, del maestro che ebbe nel 1858, parla in un articolo su *Le prigioni della regia scuola di marina in Genova* (Fanfulla della domenica, an. 1881), per ricordare, senza rancore, che, non avendo saputo rispondere ad una domanda relativa alla paraboloide di rivoluzione, fu dal Tardy condannato a tre giorni di « prigionetta », che gli tolsero di assistere, insieme coi suoi condiscipoli, allo sbarco a Genova di Napoleone III, che veniva allora in Italia quale nostro alleato contro l'Austria.



abbandonarla, non ostante gli inviti, ripetutamente rivoltigli da Betti quando scomparsi, prima il Mossotti e poi il Novi, divenne libera una cattedra di matematica a Pisa, rivoltigli dal Genocchi alla morte del Plana. Dell'Università di Genova fu anche rettore durante due triennii (1865-1868, 1878-1881), conquistandosi da parte dei suoi commilitoni una stima altissima, non inferiore a quella concordemente tributatagli dai discepoli, in tutte le scuole in cui ebbe ad insegnare, dai matematici del suo tempo, che lo elessero a far parte dei principali sodalizi scientifici italiani <sup>(1)</sup>, e dal Governo, che gli affidò ripetutamente importanti e delicati incarichi <sup>(2)</sup>.

Morta nel 1880 la diletta compagna della sua vita <sup>(3)</sup>, al Tardy il soggiorno di Genova ed il gravame dell'insegnamento riuscirono insopportabili; onde, benchè sempre robusto di corpo ed alacre di mente, con generale rimpianto della scolaresca, dei colleghi e della cittadinanza, chiese il proprio collocamento a riposo; essendo stato tale desiderio esaudito con decreto del 4 dicembre 1881, egli si trasferì nuovamente a Firenze, ove visse altri trentatrè anni, circondato dall'affetto vivissimo dei congiunti e degli amici, senza dar segno di alcun deperimento intellettuale e fisico, a prescindere dall'indebolimento della vista. Una violenta polmonite lo abbattè il 1° novembre dello scorso anno, qual fulmine su vetusta quercia, mentre tutti coloro che lo conoscevano nutrivano fiducia di poterlo salutare centenario.

### III.

La produzione matematica del Tardy non è molto voluminosa e comprende scritti ispirati dalle opere che egli, lettore instancabile, andava studiando; chè il loro scopo è o di risolvere questioni lasciate in sospeso (alcuni, anzi, non fanno che sciogliere quesiti proposti nei *Nouvelles annales de mathématiques*) o di chiarire, criticare od applicare concetti e metodi escogitati dai più eminenti matematici del suo tempo. Tale carattere si riscontra nel suo primo lavoro originale [2] <sup>(4)</sup>, il quale si riferisce ad un ordine di questioni poste all'ordine del giorno da Fourier ed a cui avevano dato importanti contributi due matematici con cui il Tardy aveva grande dimestichezza, cioè il Libri ed il Piola; parlo della costruzione di espres-

(1) Oltre che Socio nazionale della nostra Accademia, era uno dei XL della Società italiana delle scienze, corrispondente dell'Accademia delle scienze di Torino e dell'Istituto lombardo; apparteneva anche all'Accademia dei georgofili di Firenze; non escluso potesse appartenere ad altre congeneri compagnie.

(2) Basti ricordare che a lui venne affidata l'istruzione matematica del principe Oddone di Savoia.

(3) Laura Cini, scrittrice apprezzatissima ai suoi tempi, che pubblicò molti bozzetti letterarii nella *Rivista europea*, assumendo il nome di Sara.

(4) Questa rarissima Memoria mi è nota soltanto per un manoscritto rinvenuto fra le carte relitte dal Tardy; ignoro, quindi, se tale ms. sia identico al lavoro stampato.

sioni analitiche atte a rappresentare in intervalli diversi della variabile indipendente, funzioni differenti. Sono specialmente i concetti del Libri che il nostro ha applicato a svariate questioni, non soltanto di algebra, ma anche di aritmetica od offerte dal giuoco degli scacchi (studio del cammine del cavallo). In tal modo egli ha ottenuto formole che si distinguono per semplicità ed eleganza, ma che non conseguirono un posto stabile nella scienza, avendo doti esclusivamente formali, a somiglianza dell'espressione che assegna il numero dei numeri primi non superiori ad un certo limite che, come è noto, il Legendre dedusse <sup>(1)</sup> traducendo in simboli la celebre procedura conosciuta sotto il nome di « staccio d'Eratostene ».

Quest'ordine d'indagini, forse perchè ravvisate di non grande importanza, fu ben tosto abbandonato dal nostro matematico, il quale passò a studiare uno fra i più ardui soggetti della meccanica, cioè il moto dei liquidi. Una sua Memoria [4], « di squisita fattura » (sono parole di Valentino Cerruti), mostra che egli conosceva a fondo tutti gli scritti anteriori sull'argomento ed era in grado di misurarne l'importanza assoluta e relativa. Notovole specialmente il paragone da lui istituito fra i lavori di d'Alembert e Lagrange, sul moto a due coordinate, con quanto scrisse il Venturòli, che allora passava per un'autorità indiscutibile; tale acuta analisi portò il Tardy a concludere che questi nulla aggiunse di sostanziale ai risultati conseguiti dai suoi predecessori. Passando poi a trattare del moto a tre coordinate, ebbe occasione di fare varie eleganti applicazioni di alcune sue formole (allora ancora inedite) pertinenti alla teoria dei differenziali ad indice fratto, che meriterebbero di venir tolte dalla dimenticanza in cui sono cadute <sup>(2)</sup>.

Aggiungiamo che in un punto dello stesso lavoro il matematico messinese segnalò alcuni errori commessi dal geometra inglese Challis e che lo avevano indotto a « conseguenze falsissime »; le stesse critiche essendo state fatte per conto suo da G. Bertrand, il Challis tentò un'auto-difesa nel fascicolo di giugno 1849 del « Philosophical Magazine »: ciò indusse il nostro ad esporre con maggiore diffusione i propri modi di vedere, in un progevole lavoro [6] che quella Rivista si affrettò a diffondere di là dalla Manica <sup>(3)</sup>.

Mentre il Tardy meditava sulle applicazioni della matematica alla spiegazione d'importanti fatti naturali, non trascurava le investigazioni di pura analisi.

<sup>(1)</sup> *Théorie des nombres*, II ed. (Paris, 1808), pag. 414.

<sup>(2)</sup> Interessanti considerazioni sopra questo lavoro del Tardy si leggono nella seconda parte della Memoria di A. Genocchi, *Di una Nota del barone Plana: casi particolari del moto dei liquidi* (Annali di matematica, tom. I, 1858, pp. 383-396).

<sup>(3)</sup> Ivi è anche incidentalmente criticata una formola di V. Amici; da ciò due lettere, d'intonazioni differenti, da questo scienziato pubblicate nel tom. II (pp. 302 e 368) degli *Annali* di Tortolini.

Infatti un bel teorema sulle equazioni differenziali lineari, enunciato dal Malmsten, venne da lui dedotto [6], nel modo più naturale, da una proposizione del Libri; questa e quello furono poi da lui estesi [7] alle analoghe equazioni alle differenze finite.

Circa nello stesso tempo [8] egli applicò alla divisione delle funzioni ellittiche i risultati stabiliti da Abel nella sua fondamentale Memoria *Sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*. Poco dopo scriveva due brevi Note di carattere elementare [9 10] per rispondere a questioni proposte nelle *Nouvelles Annales de mathématiques*; notevoli entrambe per la perfetta eleganza di calcolo, lo sono inoltre la prima perchè addita una ricchissima sorgente di identità algebriche <sup>(1)</sup>. l'altra (dimostrazione di un teorema di Prouhet) per un inatteso intervento della serie ipergeometrica in una questione di planimetria elementare.

Nella produzione matematica del Tardy si avverte a questo punto un'interruzione durata all'incirca un sessennio e dovuta indubbiamente alle cure dell'insegnamento, per lui allora gravosissime. Dal suo volontario silenzio egli uscì in occasione della fondazione degli *Annali di matematica*, nel primo volume dei quali egli fece finalmente conoscere [11] i frutti delle sue investigazioni intorno ai differenziali ad esponente fratto, alle quali egli diede l'ultima mano, dopo di avere preso notizia dei più recenti lavori sull'argomento. I suoi risultati non coincidono, nè nel punto di partenza, nè tampoco nelle conclusioni, con quelli del Liouville <sup>(2)</sup>; giacchè, mentre questi applicò l'espressione euleriana di un differenziale qualunque dell'espressione  $e^{mx}$  ad una funzione qualunque, previamente trasformata in una somma di esponenziali, il Nostro mostrò che tale incomoda previa metamorfosi si può evitare partendo dalla formola

$$\int^{(\mu)} \varphi(x) dx^\mu = \sum_{r=0}^{n=\infty} (-1)^r \frac{x^{\mu+r}}{\Gamma(\mu+r)} \varphi^{(r)}(x),$$

<sup>(1)</sup> Il Tardy insegna una formola che serve a trasformare in una somma il prodotto d'un certo numero  $n$  di fattori. Per  $n=2$  o  $3$ , essa diviene:

$$4 a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2$$

$$24 a_1 a_2 a_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (-a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 - a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2 - a_3)^3,$$

identità già note; per  $n=4$  essa dà invece quest'altra nuova:

$$192 a_1 a_2 a_3 a_4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 - (-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4$$

$$- (a_1 - a_2 + a_3 + a_4)^4 - (a_1 + a_2 - a_3 + a_4)^4 - (a_1 + a_2 + a_3 - a_4)^4$$

$$+ (a_1 + a_2 - a_3 - a_4)^4 + (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^4 - (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)^4.$$

Auguriamo che tali relazioni prendano posto in ogni collezione d'identità.

<sup>(2)</sup> Sarebbe interessante di conoscere il parere del Liouville sopra questo nuovo indirizzo impresso alla teoria a cui egli si era dedicato con tanto impegno; ma sin dal 1858 egli aveva abbandonate tali ricerche, per dedicarsi totalmente alle ricerche aritmetiche che soltanto la morte potè interrompere.

la quale, se  $r$  è intero positivo, si ottiene con successive integrazioni per parti; nel caso generale essa può adoperarsi per definire il primo membro, dal momento che il secondo membro ha anche allora un significato ben determinato. Non è il caso che io mi arresti ad esporre i corollari che il Tardy ne trasse supponendo che la funzione  $\varphi(x)$  si identifichi con le più semplici funzioni che s'incontrano nell'analisi ( $x^m$ ,  $\log x$ ,  $e^{mx}$ , ...). Va invece rilevato che egli applicò le esposte considerazioni ad ottenere sotto forma nuova e di notevole concisione le funzioni soddisfacenti alle prime equazioni integrali del tipo Volterra che siano state incontrate <sup>(1)</sup>, quelle cioè che vennero notoriamente risolte da Abel e da Liouville; ora, il fatto che i differenziali ad esponente fratto siano stati vantaggiosamente usati nel trattare specialissime equazioni integrali, porta a congetturare che fra quella teoria ed il più moderno (ed anche più italiano!) ramo dell'analisi matematica esistano legami profondi, meritevoli di esser posti in completa luce <sup>(2)</sup>.

Dieci anni dopo, il Tardy, per invito del principe Boncompagni, dava un complemento importante [15] a questo suo lavoro, mostrando come la nota formola di Leibniz

$$D^{\mu}(uv) = \sum_r \binom{\mu}{r} D^{\mu-r} u \cdot D^r v,$$

che dà la derivata  $\mu$ -esima del prodotto di due funzioni  $u, v$  d'una stessa variabile, sussista anche per valori non interi e positivi dell'esponente  $\mu$ .

Nel frattempo, altri argomenti di calcolo infinitesimale avevano attratto la sua attenzione. Così, da una formola stabilita dall'Hoppe per calcolare la derivata d'ordine qualunque di una funzione del tipo  $f[u(x)]$ , egli fu indotto [12] a risolvere l'analoga questione per le funzioni della forma  $f[u_1(x), u_2(x)]$ , e così spianò la via a chi intendesse trattarla per tutte le funzioni della forma  $f[u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)]$ .

Altro tema a cui dedicò assidui studi è il calcolo approssimato degli integrali definiti, sul quale scrisse un dottissimo lavoro [14], che quasi nessuno conosce, nel quale, con procedimento uniforme, sono stabilite, discusse e paragonate fra loro tutte le migliori formole note per la quadratura approssimata (quelle, cioè, che portano i nomi di Mac-Laurin, Poisson, Legendre, Menabrea, Poncelet, Simpson, Parmentier, Weddle, Gauss, Turazza), e per ciascuna espresse il resto sotto forma d'integrale definito: è questa forse la Memoria del Tardy in cui più chiaramente rifulgono le invidiabili sue doti

<sup>(1)</sup> V. Volterra, *Lçons sur les Équations intégrales et les équations intégrales différentielles* (Paris, 1912, pp. 34 e segg.).

<sup>(2)</sup> A chi intendesse riprendere gli studi sui differenziali ad indice qualunque va raccomandato un frammento postumo di Riemann (*Werke*, Leipzig, 1876, pag. 331) che (non sappiamo per qual ragione) venne escluso dalla traduzione francese delle Opere di quel grande analista.



di vasta dottrina, di acume critico e di straordinaria abilità nel calcolo. Verso il termine di essa, egli incontrò due relazioni nuove ed importanti che passano fra una certa serie di coefficienti binominali, e credette poi opportuno stabilirle direttamente [14] con semplici considerazioni di stretta pertinenza dell'analisi combinatoria.

Nè del calcolo infinitesimale si disinteressò dopo essersi ritirato dall'insegnamento: infatti è datato dal 1884 un suo lavoro [17] relativo alle equazioni differenziali lineari, secondo l'indirizzo dato a tale teoria dal Fuchs: esso ha per iscopo di stabilire alcune formole enunciate dal Thomé, col mezzo di calcoli la cui raffinata eleganza maschera l'inevitabile complicazione.

Circa contemporaneo e di soggetto analogo è un articolo [18] avente per iscopo di insegnare un metodo più semplice di quello che era stato allora proposto per integrare il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = v_1, \quad \frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = v_2,$$

nel caso in cui tra le funzioni  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_2$  della variabile  $x$  sussista la relazione

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_2}} = e^{\int (P_1 - Q_2) dx};$$

il Tardy riduce la questione ad integrare l'equazione differenziale di secondo ordine

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (X + X_1) \frac{dy}{dx} + (XX_1 + X'_1) y = V,$$

ed aggiunge l'osservazione che tutte le equazioni differenziali lineari di detto ordine, che sapevansi allora integrare, sono casi speciali di quella ora scritta.

Il carteggio del Tardy sta a provare che egli dedicò lunghe ore di assiduo studio alla *Theorie der Abel'schen Functionen* di Clebsch e Gordan, contro cui anzi fece qualche obbiezione, che, essendo stata comunicata dal Cremona al primo dei citati autori, venne riscontrata e dichiarata totalmente giusta.

Anche alla teoria de' numeri egli volse la propria attenzione, della qual cosa esistono pubbliche attestazioni nei due lavori di cui ci resta ancora da parlare.

Uno di essi [16] ha per iscopo di dimostrare cinque importanti teoremi sulle equazioni binomie enunciati nel 1844 dall'Eisenstein. Dopo di averlo consegnato alla direzione degli *Annali di matematica*, l'autore si accorse di essere stato preceduto dallo Stern sino dal 1861; ma quella Direzione, col

pubblicare egualmente quello scritto, manifestò apertamente l'opinione che le antiche dimostrazioni non toglievano valore alle nuove.

Di natura aritmetica è eziandio l'ultima delle pubblicazioni del Tardy; essendo apparsa quand'egli toccava gli ottantotto anni, è per avventura il lavoro più senile che annoveri la letteratura matematica. Però una sua lettera, diretta al principe Boncompagni addì 27 novembre 1887, sta a provare che le ricerche, d'onde ivi sono esposti i risultati, vennero iniziate assai prima, cioè nel 1875; ed in pari tempo rivela che il movente ad intraprenderlo fu un articolo di quel benemerito bibliografo <sup>(1)</sup>, concernente un celebre teorema scoperto per la prima volta da Nicomaco Geraseno e ritrovato poi molte altre volte da matematici di valore aventi imperfetta cognizione della matematica greca: parliamo del teorema espresso dalla formola

$$n^3 = \sum_{k=1}^{n-1} \{n(n-1) + (2k-1)\}.$$

Ora, il nostro matematico ha notato che una somigliante proposizione sussiste in tutte le progressioni aritmetiche aventi per primo termine l'unità e per differenza costante un numero pari  $2d$ ; decomponendola, infatti, in gruppi che comprendano rispettivamente  $1, 1+d, 1+2d, \dots$  termini, si ottiene sempre come somma degli elementi di ciascun gruppo un cubo. Estendendo ulteriormente tale considerazione, egli ha notato che, se  $n$  è pari, nella stessa progressione si può trovare un gruppo di  $1+nd$  termini la cui somma sia eguale a  $(1+nd)^m$ , ove  $m$  è un intero  $\geq 3$ . Proprietà analoghe posseggono le progressioni aritmetiche del tipo  $a, 3a, 5a, \dots$ . Queste proposizioni sono senza dubbio eleganti ed hanno una certa importanza, perchè collocano nella debita luce il surriferito teorema di Nicomaco: una certa, ma non una grande importanza: è quanto lo stesso Tardy bonariamente riconosceva quando le chiamava semplici giuochi a cui lo stato della sua vista lo costringeva a limitare le proprie occupazioni matematiche. Va notato che, benchè comunicate al mondo scientifico per il tramite di una delle più cospicue Accademie d'Europa, esse raggiunsero limitata notorietà: lo prova il fatto che la prima di esse venne, proprio ai dì nostri ed in Italia, riottenuta *ex-novo* <sup>(2)</sup> come estensione del teorema di Nicomaco, riscoperto una nuova volta nell'anno di grazia 1914 <sup>(3)</sup>.

Giunti al termine di questa sommaria analisi degli scritti matematici del Tardy, osserviamo come da essa emerga che tali lavori si distinguono meno per novità di concetti e di metodi che per la profonda dottrina che atte-

<sup>(1)</sup> *Intorno ad una proprietà dei numeri dispari* (Bullettino del Boncompagni, tom. VIII, 1875, pp. 51-62).

<sup>(2)</sup> Vedi E. Nannei in *Il Pitagora*, tom. XXI, 1914-15, pp. 11-13.

<sup>(3)</sup> E. Barisien in *L'intermédiaire des mathématiciens*, tom. XXI, 1914, pag. 123.

stano nel loro autore, per la squisita accuratezza di stile e di calcolo e per la non comune abilità algoritmica che rivelano in chi li scrisse. Appunto tale preferenza da lui manifestata per il calcolo sul ragionamento, la quale è sintomo d'un'orientazione di pensiero in aperta antitesi con quella oggi dominante, spiega perchè le Memorie del dotto matematico messinese abbiano in questi ultimi tempi trovati poco numerosi lettori, ond'egli fu dimenticato dopo la scomparsa dei matematici della sua generazione ed è quasi totalmente ignoto alla schiera di giovani analisti, in cui l'Italia ripone le sue più fondate speranze. Ma la legge dei ricorsi storici, alla quale non sfugge l'evoluzione del pensiero scientifico, induce a credere che l'avvenire riserbi a lui tempi migliori; allora, forse, qualche nuova recluta dell'esercito matematico scoprirà, nelle formole che egli ha sapientemente architettate, qualche idea degna di venire riposta in circolazione o qualche algoritmo suscettibile di ulteriore applicazione: che tale fiducia non sia priva di fondamento, è dimostrato dall'intervento, nella teoria delle equazioni integrali, dei differenziali ad indice fratto, cioè della dottrina in cui egli si affermò con più spiccata originalità di pensiero. Il giorno in cui tale previsione sia per essere avverata, sarà dimostrato che Placido Tardy ha nobilmente disimpegnati entrambi gli uffici affidati ad uno scienziato degno di tale nome: il mietere le messi ormai mature ed il gittare semi capaci di assicurare vitale nutrimento alle generazioni dell'avvenire.

#### ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI P. TARDY

- [1]. *Sulla dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle funzioni unanalitiche di Lagrange di Agatino San Martino*. Cenno di Placido Tardy (Il « Faro » giornale di scienze, lettere ed arti, tom. IV, Messina, 1836).
- [2]. *Sulle funzioni discontinue*. Ricerche di Placido Tardy. Messina, 1843.
- [3]. *Preliminari di una Memoria sui differenziali a indice fratto* (Atti della sesta Riunione degli scienziati italiani tenuta in Milano nel settembre 1846).
- [4]. *Sopra alcuni punti della teoria del moto dei liquidi*. Firenze, 1847.
- [5]. *Sulle equazioni differenziali lineari* (Annali di Tortolini, tom. I; Giornale di Crelle, tom. XLII, 1851).
- [6]. *Sopra una nuova equazione di idrodinamica. Alcune osservazioni* (Annali di Tortolini, tom. I, 1850; Philosophical Magazine tom. XXXVI, 1850).
- [7]. *Sulle equazioni lineari alle differenze finite* (Annali di Tortolini, tom. I, 1850; Giornale di Crelle, tom. 42, 1851).
- [8]. *Sulla risoluzione algebrica di talune equazioni* (Annali di Tortolini, tom. II, 1851).
- [9]. *Trasformazione di un prodotto di n fattori* (Annali di Tortolini, tom. II, 1851; Nouvelles Annales de mathématiques, tom. X, 1851).
- [10]. *Sopra un teorema di poligonometria* (Annali di Tortolini, tom. III, 1852; Giornale di Crelle, tom. XLVII, 1854).
- [11]. *Sui differenziali a indice qualunque* (Annali di matematica, tom. I, 1858).
- [12]. *Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte* (Giornale di matematiche, tom. II, 1864).

- [13]. *Sopra alcune formole relative ai coefficienti binomiali* (Giornale di matematiche, tom. III, 1865).
- [14]. *Sulle quadrature* (Mem. della Società italiana delle scienze residente in Modena, ser. II, tom. II, 1866).
- [15]. *Intorno ad una formula del Leibnitz* (Bullettino del Boncompagni, tom. I, 1868; Nouvelles annales de mathématiques, II ser., tom. VII, 1869).
- [16]. *Sopra alcuni teoremi aritmetici* (Annali di matematica, tom. III, 1870).
- [17]. *Relazioni tra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti* (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, tom. XIX, 1884).
- [18]. *Remarque sur une Note de M. Ibach* (Nouvelles Annales de mathématiques, ser. 3<sup>a</sup>, tom. III, 1884).
- [19]. *Sulle serie aritmetiche di numeri interi* (due Note) (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, tom. XXXIX, 1904).

## APPENDICE (\*).

### LETTERE AL TARDY DI GENOCCHI, BETTI E SCHÄFLI

Il Tardy mantenne corrispondenza epistolare con tutti i principali matematici italiani del tempo suo <sup>(1)</sup> e con alcuni stranieri <sup>(2)</sup>; le lettere, da lui ricevute e religiosamente conservate, verranno, per voler suo, depositate nell'autografoteca esistente nella Biblioteca della R. Università di Genova. Un rapido esame da me fattone m'indusse a notarne alcune dotate di tanto considerevole valore storico e scientifico che reputo opportuno di renderle di pubblica ragione, senza escludere che un più minuto esame di esse possa portare alla scoperta di altre di non minore importanza.

#### I.

Nella traduzione italiana dell'*Aritmetica generale* del Baltzer è indicata (2<sup>a</sup> ed., Genova, an. 1875, pag. 49 <sup>(3)</sup>) una nuova coppia di « numeri amici », scoperta da un « signor Paganini di Genova »; ora, sopra tale ritrovato, dà qualche notizia il seguente brano di lettera del Genocchi:

*Carissimo amico,*

Non so se conosciate un barone Nicolò Paganini, giovine genovese di 16 anni, nipote del celebre violinista, che si occupa di teoria di numeri. Egli ha mandato già molte lettere all'Accademia delle scienze di Torino, e in esse comunicava una nuova coppia di numeri amabili, che sono 1184 e 1210, ma senza far conoscere il suo metodo. Sapete che la questione può annoverarsi fra le *difficiles nugae*: tre coppie furono date da Schooten; altre ventisette da Eulero. Legendre, che non conobbe quelle di Eulero, trovò solamente le tre prime di Schooten e fece molti inutili tentativi per iscoprirne altre. La coppia del Paganini non è fra le trenta ora menzionate, e si compone di numeri molto più pic-

(\*) La presente Appendice fu pubblicata in seguito al testo riguardante la Commemorazione del Socio Placido Tardy, per il legame naturale che quella ha con questa; e però si oltrepassarono le pagine prescritte dal Regolamento per le Note presentate da Soci e Corrispondenti.

(1) Bellavitis, Beltrami, Betti, Boncompagni, Brioschi, Casorati, Chiò, Cremona, Donati, Frisiani, Genocchi, Isè, Jung, Libri, Mainardi, Menabrea, Mossotti, d'Ovidio, Piola, Plana, Sella, Siacci, Tortolini, Turazza.

(2) Airy, Cayley, Grunert, Hirst, Klein, Pelz, Peters, Quetelet, Schläfli, da Silva, Spottinswoode, Sylvester.

(3) Cfr. anche Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, tomo II, 1866-67, pag. 362.



coli di quelli d'Eulero. Ora egli scrive un'altra lunga lettera, da me non ancora letta, in cui pare spieghi il metodo da lui tenuto; . . . . .

Torino, 25 dicembre 1866.

## II.

Nell'autunno 1863 Riemann si trovava, per ragioni di salute, in Italia; delle conversazioni da lui tenute col Betti, si ritrova una tarda eco in due lettere di questi, concernenti la « connessione », le quali mi sembrano importanti per due ragioni, cioè, perchè porgono un'illustrazione, per così dire, autorizzata delle idee del grande matematico tedesco, e perchè evidentemente preludono alle fondamentali ricerche, su quell'argomento, del Betti stesso. Donde i motivi alla presente pubblicazione:

Firenze, 6 ottobre 1863.

*Mio caro Placido,*

Ho nuovamente parlato con Riemann della connessione degli spazii, e me ne sono fatto una idea esatta.

Uno spazio si dice semplicemente connesso quando ogni superficie chiusa, contenuta in esso, ne limita da sè sola completamente una parte, e ogni linea chiusa contenuta contemporaneamente in esso limita completamente una superficie contenuta interamente nello stesso, ossia può riguardarsi da sè sola come il contorno completo di una superficie contenuta interamente nello spazio stesso.

Lo spazio racchiuso da un ellissoide è uno spazio semplicemente connesso. Lo spazio racchiuso da due sfere concentriche non è semplicemente connesso, perchè una terza sfera concentrica compresa fra le due, sebbene chiusa e contenuta nello spazio, non limita da sè sola una parte dello spazio stesso. In questo spazio però una linea chiusa qualunque può riguardarsi come l'intero contorno di una superficie, tutta contenuta nello spazio stesso. Questo spazio può ridursi semplicemente connesso per mezzo di una sezione lineare, cioè di una linea che va dalla superficie esterna a un punto della sfera interna. Dovendo i punti di questa sezione riguardarsi allora come esterni allo spazio, le sfere concentriche comprese fra le due non sono più comprese interamente nello spazio, perchè attraversano la sezione, e quindi lo spazio, coll'aggiunta di una sezione lineare, è ridotto semplicemente connesso.

Lo spazio racchiuso in un anello pieno non è semplicemente connesso, perchè una linea come l'asse non può riguardarsi come il contorno completo di una superficie contenuta tutta intera nello spazio. Ogni superficie chiusa, però, contenuta interamente in questo spazio, ne limita da sè sola completamente una parte. Questo spazio si riduce semplicemente connesso mediante una sezione superficiale semplicemente connessa, che taglia l'anello normalmente all'asse interno dell'anello stesso.

Uno spazio racchiuso da un anello vuoto non è semplicemente connesso, perchè una superficie chiusa, che racchiude l'asse interno ed è dentro la parte piana dell'anello, non limita da sè sola una parte di spazio, e una linea parallela all'asse interno contenuta nella parte piana dello spazio non può formare il contorno completo di una superficie contenuta tutta quanta nello spazio stesso. Si riduce semplicemente connessa mediante una sezione lineare che va da un punto della superficie esterna ad uno della interna, e mediante una sezione superficiale che unisca tra loro la superficie esterna, l'interna e la sezione lineare, e che è semplicemente connessa.

I tre spazii che ho considerati hanno differenti ordini di connessione, perchè l'ordine di connessione dipende dal numero delle sezioni superficiali semplicemente connesse, e

dal numero delle sezioni lineari mediante le quali si riduce semplicemente connessa. Questo numero rimane lo stesso, comunque si facciano queste sezioni. L'ordine di connessione è quindi rappresentato da due numeri; denotiamolo con  $(m, n)$  quando sono  $m$  le sezioni superficiali ed  $n$  le lineari che lo rendono semplicemente connesso. Sarà  $(0,1)$  l'ordine di connessione dello spazio racchiuso da due sfere, una interna all'altra. Sarà  $(1,0)$  l'ordine di connessione di un anello pieno. Sarà  $(1,1)$  l'ordine di connessione d'un anello vuoto. La generalizzazione per più dimensioni è facile; e l'importanza, per gli integrali multipli, di tutta questa teorica, è evidente. La nozione delle sezioni è venuta in mente a Riemann per una definizione che gliene ha dato Gauss in un colloquio familiare, parlando di altro soggetto. Nei suoi scritti si trova che egli dice che l'analisi di sito, cioè questa considerazione delle quantità indipendentemente dalla loro misura, è « wichtig », e negli ultimi anni della sua vita si è occupato molto di un problema di analisi di situazione: cioè, dato un filo che si avvolge più volte e conoscendo, nei punti dove s'interseca, la parte che rimane sopra e la parte che rimane sotto, determinare se potrà svolgersi senza annodarlo; problema che non è riuscito a risolvere altro che in casi particolari.

. . . . .

Firenze, 16 ottobre 1863.

*Mio caro Placido,*

Riemann dimostra, con molta facilità che si può ridurre uno spazio qualunque ad essere semplicemente connesso, mediante sezioni lineari e sezioni superficiali semplicemente connesse.

Uno spazio connesso non muta l'ordine della sua connessione se si restringono o distendono le superficie che lo limitano, facendone muovere i loro punti verso l'interno dello spazio stesso sino a far perdere allo spazio una e più dimensioni, purchè questo restringimento e questa diffusione avvenga, con continuità e senza rotture. Affinchè uno spazio sia semplicemente connesso, è necessario che così si possa ridurre a un sol punto. Una superficie che così può ridursi a un punto, è semplicemente connessa senza potersi ridurre a un punto senza che si faccia in essa un punto di sezione; per esempio una superficie sferica, dove, se vuoi ridurla a un punto, devi fare un buco che estendi continuamente sinchè la superficie si riduca a un punto.

Per maggior chiarezza riprenderò gli esempi dell'altra volta.

Una sfera cava, se tu restringi la superficie esterna e distendi l'interna sino a renderle infinitamente vicine, perde una dimensione e si riduce ad una superficie sferica, la quale, mediante un punto di sezione, può ridursi ad un sol punto. Questo punto di sezione, che ha una dimensione di meno di quella che aveva nello spazio, corrisponde ad una sezione lineare. Dunque una sfera cava si riduce semplicemente connessa mediante una sezione lineare; il suo ordine di connessione è  $(1,0)$ .

Un anello pieno, se tu restringi continuamente la superficie esterna fino a che le sue pareti interne siano infinitamente vicine, perde due dimensioni e si riduce a una linea circolare, la quale con un sol punto di sezione si riduce a un sol punto. Questo punto di sezione, che ha due dimensioni di meno che, nello spazio primitivo non corrisponde ad una sezione superficiale che, potendo ridursi a un punto, è semplicemente connessa. Dunque l'ordine di connessione di un anello pieno è  $(0,1)$ .

Un anello vuoto, se tu restringi la superficie esterna e distendi la interna fino a ridurle infinitamente vicine perde una dimensione e si riduce ad una superficie anulare, la quale, per essere ulteriormente ridotta, richiede un punto di sezione corrispondente ad una sezione lineare. Allargando questo buco indefinitamente sinchè i suoi bordi risultano dalle parti opposte infinitamente vicini, la superficie anulare perde un'altra dimensione e si riduce a due linee circolari, una delle quali ha il centro comune coll'anello, l'altra

ha il centro sull'asse interno all'anello, e i piani loro puoi immaginarli perpendicolari tra loro. Per ridurre uno di questi cerchi al solo punto che hanno comune, occorre un punto di sezione: poi un altro punto di sezione per ridurre ad un punto il circolo rimasto. A questi due punti di sezione, che hanno due dimensioni di meno che non nello spazio, corrispondono, in quello, due sezioni superficiali semplicemente connesse. Dunque l'ordine di connessione dell'anello vuoto è (1,2), e non (1,1) come per inavvertenza ti aveva scritto l'altra volta.

Una sfera con un vuoto anulare nell'interno, se tu restringi la superficie sferica, perde una dimensione e si riduce ad una superficie piana che unisce i bordi interni della superficie anulare. Con un punto di sezione si riduce questa superficie a una linea circolare che ha il centro nell'asse interno dell'anello, e a una superficie circolare piana che ha il centro comune coll'anello. Con un altro punto di sezione la linea circolare si riduce a un punto del bordo della superficie circolare piana, che senza altre sezioni puoi ridurre a un punto. Dunque una sfera con un vuoto anulare si riduce semplicemente connessa con una sezione lineare e con una sezione superficiale semplicemente connessa. Il suo ordine di connessione è (1,1).

Generalizzando, si vede che una varietà a  $n$  dimensioni si può, sempre con restringimenti continuati e senza rotture, ridurre a sole  $n-1$  dimensioni. Mediante punti di sezione si potrà ridurre a  $n-2$  dimensioni, mediante altri punti di sezione, a  $n-3$  dimensioni; e così di seguito, sino a ridurla a un punto. Ai primi punti di sezione corrispondono sezioni lineari; ai secondi sezioni superficiali semplicemente connesse; ai terzi sezioni di tre dimensioni semplicemente connesse...; agli ultimi sezioni di  $n-1$  dimensioni semplicemente connesse.

Il numero delle sezioni lineari è eguale al numero dei moduli di periodicità di un integrale  $(n-1)$ -plo; il numero delle sezioni superficiali semplicemente connesse al numero dei moduli di periodicità di un integrale  $(n-2)$ -plo...; il numero delle sezioni di  $(n-1)$  dimensioni semplicemente connesse, al numero dei moduli di molteplicità di un integrale semplice, presi tutti nello spazio considerato. Quindi, essendo determinato il numero dei moduli di periodicità, devono essere sempre gli stessi i numeri delle differenti sezioni a ridurre lo spazio semplicemente connesso, comunque si facciano . . . . .

### III.

Le due lettere seguenti, dirette al Tardy dall'illustre matematico svizzero Schläfli, vengono qui pubblicate, in parte pel valore del loro contenuto, in parte pei significanti giudizi ivi espressi sopra lavori del Nostro. La prima prende le mosse dalle « funzioni bernoulliane » che entrano nella formola data da Mac-Laurin per il calcolo approssimato d'un integrale definito, della quale il Tardy si è occupato in una sua Memoria [14]. Invece la materia della seconda rappresenta in massima parte la prima stesura delle ricerche che diedero argomento alle due ben note Memorie dello Schläfli, *Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati e Alcune osservazioni intorno alle funzioni di Laplace*, entrambe inserite nel tom. I della 2<sup>a</sup> ser. degli *Annali di matematica*; onde le lettere stesse provano essere stati i lavori del Tardy che ispirarono tali importanti scritti.

*Signore!*

La ringrazio pel pregevole dono che "à" avuto la benevolenza d'inviarmi. Ch'ella mi perdoni che tento di parlare Italiano, e mi permetta qualche nota intorno alle funzioni Bernoulliane. Preferisco di restituirvi l'ultimo termine (costante), se il grado è pari,

e di dividerla sicchè il summo termine sia  $\frac{x^n}{\Pi n}$ . Adesso ella può esser definita per l'uguaglianza  $\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x) t^n$ , ove  $\chi(n, x)$  denota la cangiata forma della funzione Bernulliana. Dalla uguaglianza definitrice si ricavano facilmente le formole

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(n, x) = \chi(n-1, x), \quad \chi(n, 1-x) = (-1)^n \chi(n, x),$$

$$\chi(n, 1+x) - \chi(n, x) = \frac{t^{n-1}}{\Pi(n-1)}, \text{ ecc.}$$

La funzione Bern. è secondo Raabe  $\Pi(n-1) \cdot (\chi(n, x) - \chi(n, 0))$ . Il Raabe à dato alla uguaglianza definitrice de' numeri Bern. un termine complementare che mi pare esser di grand importanza. Se  $\chi(1, 0) = -\frac{1}{2}$ ,  $\chi(2n, 0) = (-1)^{n-1} \frac{B_n}{\Pi(2n)}$ ,  $\chi(2n+1, 0) = 0$ , quella uguaglianza è

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \chi(\lambda, 0) x^\lambda + \frac{x^{n+1}}{e^x-1} \int_0^1 e^{xt} \chi(n, 1-t) dt.$$

Se si sostituisce  $\omega \frac{\partial}{\partial x}$  invece di  $x$ , e se vi è un oggetto  $\left( e^{n\omega \frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right) f(x)$ , ne risulta la formola d'integrazione approssimativa col termine complementare. Moltiplicata con  $e^x - 1$ , se poi si pone  $x = i \cdot 2r\pi$  ( $r=1, 2, \dots, -1, -2, \dots$ ), essa somministra il valore di  $\int_0^1 e^{xir\pi t} \chi(n, t) dt$ , vale a dire, l'evoluzione

$$\chi(n, x) = - \frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{r=1}^{r=\infty} r^{-n} \cos \left( 2r\pi x - \frac{n\pi}{2} \right) \quad (0 < x < 1),$$

e quindi mediante  $\int_0^{1/2} \cotg \pi t \cdot \sen 2r\pi t \cdot dt = \frac{1}{2}$

$$\int_{-x}^{1-x} (\chi(n+1, x+t) - \chi(n+1, x)) \cotg \pi t \cdot dt = - \frac{2}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{r=1}^{r=\infty} r^{-n-1} \cos \left( 2r\pi x - \frac{n\pi}{2} \right).$$

Sia  $\frac{ye^{xy}}{e^y-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \chi(\lambda, x) y^\lambda + R$ , il termine complementare sarà

$$R = - y^{n+1} \frac{e^{xy}}{e^y-1} \left( \int_0^x e^{-yt} \chi(n, t) dt + \int_0^{1-x} e^{yt} \chi(n, 1-t) dt \right).$$

Comparando i coefficienti di  $y^{m+n}$  nella evoluzione secondo le potenze ascendenti di  $y$ , e poi facendo  $x=0$ , si ottiene  $\chi(m+n, 0) = (-1)^{m-1} \int_0^1 \chi(m, t) \chi(n, t) dt$ , e quindi per  $m=n$ :

$$B_n = \Pi(2n) \cdot \int_0^1 \chi^2(n, t) dt,$$

espressione di  $B_n$  in funzione di  $B_1, B_2, \dots B_{\frac{n-1}{2}}$  ovvero  $B_{\frac{n-1}{2}}$ , mentre che le formole di



Raabe, provenendo dai coefficienti di  $x^n$  nella evoluzione ascendente delle uguaglianze

$$\frac{x(2n+1, x)}{(1-x)^{n+1}} + \frac{x(2n+1, 1-x)}{(1-x)^{n+1}} = 0, \quad \frac{x(2n-1, x)}{(1-x)^{n+1}} + \frac{x(2n-1, 1-x)}{(1-x)^{n+1}} = 0$$

stabiliscono una relazione fra i numeri Bern. della seguente metà con esclusione di quella precedente metà.

Se  $(1+x)^n = \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} x^\lambda$ , che  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  denotino numeri interi non negativi,

la somma de' quali sia un dato  $m$ , partito così in tutti i modi possibili, permutazioni ammesse, e che sia  $u = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , la somma di  $n$  variabili; allora

$$\mathcal{Z}x(\alpha_1, x_1) x(\alpha_2, x_2) \dots x(\alpha_n, x_n) = \frac{\partial^{n-m-1} \left( \frac{u-1}{n-1} \right)}{\partial u^{n-m-1}}, \quad \text{se } m < n,$$

ma

$$= \sum_{\lambda=0}^{n-m-1} \binom{-(m-n+1)}{\lambda} \frac{\partial^\lambda \left( \frac{u-1}{n-1} \right)}{\partial u^\lambda} x^{(m-n+1+\lambda, u)}, \quad \text{se } m \geq n.$$

Sia  $e^x = \cos x + \sin x$ .  $e^{-x} = \cos x - \sin x$ ,  $\theta = \alpha + i\beta$ , ove  $\alpha$  deve essere positivo e  $\beta$  reale o zero,  $(\sin \alpha)^2 > (\sin \beta)^2$ ;  $a$  un numero qualsivoglia; allora la formola

$$e^{a\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n-a}{n} (2 \cos \theta)^{a-2n-1} \cdot 2 \sin \theta$$

è convergente; essa è connessa col teorema di Sig. Prouhet, e mi ha somministrato lo sviluppo

$$\int_0^\infty e^{-2x \cos \theta + a\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n-a}{n} \Gamma(a-2n) \cdot x^{2n-a} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} A_n x^n,$$

ove  $A_n = \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} \frac{1}{a+n-2\lambda}$ . Ora sia  $F(a, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(a+n+1)}$  la serie

sempre convergente, per mezzo della quale si può esprimere l'integrale dell'equazione di Riccati; posso rappresentarla per un integrale definito convergente qualchesia  $a$ . Secondo che  $t$  è positivo o negativo, si à

$$F(a, x^2) = \frac{1}{\pi} x^{-a} \left\{ \int_0^\pi e^{2x \cos \theta} \cos a\theta \cdot d\theta - \sin a\pi \cdot \int_0^\infty e^{-2x \cos \theta - a\theta} d\theta \right\},$$

$$F(a, -x^2) = \frac{1}{\pi} x^{-a} \left\{ 2 \int_0^{\pi/2} \cos \left( 2x \cos \theta - \frac{a\pi}{2} \right) \cos a\theta \cdot d\theta - \sin a\pi \cdot \int_0^\infty e^{-2x \sin \theta - a\theta} d\theta \right\}.$$

Colle stesse notazioni ch'Ella à adopato in « Trasformazione di un prodotto di  $n$  fattori », sia  $S_n^m = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \mathcal{Z} A_n^m(1, 2, \dots, \lambda)$ . Allora  $\left(\frac{1}{2}\right)^n S_n^{n+2r}$  è l'aggregato di tutti

quei termini dello sviluppo di  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{n+2r}$ , nei quali non si trova alcuno esponente pari; ma  $S_n^{n+2r-1} = 0$ .

L. SCHLAFLI.

Bern den 17. Aug. 1865.

*Caro Signore!*

Bramando di comunicarle alcune riflessioni ch'ha cagionate la lettura delle sue istruttive memorie sull'uso dell'indice fratto di derivazione e sul moto dei liquidi prima di aver ricevuta la sua pregiatissima lettera, comincio dal rispondere ad una domanda ivi contenuta. La biblioteca pubblica a Berna non abunda in giornali matematici, ed io non ho mai avuta un'altra occasione di vedere un giornale Napoletano; mà ho investigato l'eq. (58 e 59 pag. 41 Quadr.), la quale mi apparve affatto nuova. Moltiplicata per  $-1^{m-1} \binom{2n-2}{n}$  e ponendo  $m = n+1-q$ ,  $\lambda = n+1-k$ , essa prende la forma

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \binom{n+1}{\lambda} \binom{n+1+\lambda}{\lambda+1} = -1^m \binom{n+1}{m} \binom{n+1+m}{m-1}$$

purchè  $n+2$  sia un numero intero; mà testo che  $n+1=a$  è un numero qualsivoglia, la formola rimane convergente e si cangia in

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=\infty} \binom{a-1}{\lambda} \binom{1-a}{\lambda+1} = \frac{\sin a\pi}{a\pi} \binom{a-1}{m} \binom{-a-1}{m-1}$$

ossia lo che torna lo stesso

$$(a) \quad \sum_{\lambda=m}^{\lambda=\infty} \binom{a+\lambda-1}{2\lambda} \binom{1-a}{\lambda+1} 2^{2\lambda-1} = \frac{\sin a\pi}{\pi(1-a)} \left( 1 - \frac{\Gamma(m+a)\Gamma(m+1-a)}{\Gamma m \cdot \Gamma(m+1)} \right);$$

essa è adunque una formola *complementare* della serie relativa a  $m=0$ ; e, siccom'ella accenna, si dimostra subito pel prendere la differenza del secondo membro. Ma la è pur tentata in un'altra guisa. Voglia permettermi in seguito l'uso dell'abbreviatura  $[t^m u^n]$  (*espr.*) per dire il coefficiente di  $t^m u^n$  nello sviluppo della *espr.* per le potenze e pei prodotti di  $t, u, \pi$ . Ora

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=m}^{\lambda=\infty} \binom{a-1}{\lambda} \binom{1-a}{\lambda+1} &= (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{\Gamma(-a)} \left[ \frac{(1+u)^{a-1}}{1+t} \left( 1+t \frac{1+u}{u} \right)^{a-1} \right] \\ &= (1+u)^{a-1} \left( 1+t \frac{1+u}{u} \right)^{a-1} = (-1)^{m-1} \sum_{\lambda} \binom{a-1}{\lambda} \binom{a-2-\lambda}{m-\lambda} \binom{a-1}{\lambda+1} \\ &= (-1)^{m-1} \binom{a-1}{m+1} \sum \binom{a-1}{\lambda} \binom{m+1}{m-\lambda} = - \binom{a-1}{m+1} \binom{-a-1}{m}. \end{aligned}$$

Supposto ciascun dei valori assoluti di  $u$  e di  $\frac{2t}{u}$  minore di 1, gli sviluppi (alternanti) per le potenze ascendenti di  $u$ , di  $t$ , di  $t \frac{1+u}{u}$ , di  $\frac{t}{u(1+t)}$  saran tutti inevitabili (di necessità), e perciò l'impiego del principio della identità è permesso.

Nella somma (60) ciascun termine è divisibile per  $\binom{n-t+\frac{1}{2}}{n+1}$ , ecc.

Prendendo il partito del Lagrange contro gli avvisi adesso predominanti io sono persuaso che spesso viene adoprato il calcolo differenziale laddove il figuramento (più algebrico) dello sviluppo ci menerebbe più facilmente allo scopo, oltrecioch'esso è la sola aita quando siamo abbandonati dal teorema di Taylor.

La forma (a) nella presente, contenendo il numero  $\left(\frac{a+\lambda-1}{2\lambda}\right)$ , mentre

$$\left(\frac{1/a}{\lambda+1}\right) = (-1)^{\lambda} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\lambda} \theta \cos^2 \theta d\theta,$$

rammenta la ug.

$$\frac{\cos(2a-1)\theta}{\cos \theta} = \sum_{\lambda} \left(\frac{a+\lambda-1}{2\lambda}\right) (2i \sin \theta)^{2\lambda}.$$

Concedo che se fosse proposto trovare lo sviluppo del primo membro il metodo dei coefficienti indeterminati, seguito dalla differenziazione doppia, sarebbe il più naturale; ma poich'esso non determina il primo coefficiente, bisogna assumere  $\theta$  infinitamente piccolo per isolare il primo termine; quello che or è facile può in altri casi tornar difficile. Ecco un processo più artificiale, ma bensì pressochè puramente algebrico, se un cotal nome è permesso in sviluppi infiniti.

I. Sia  $z = x + y$ ,  $\frac{1}{z} = x - y$ , dunque  $z^2 = 1 + 2yz$ ,  $\frac{1}{z^2} = 1 - 2yz$ . Si figuri  $y$  abbastanza piccolo acciò il valore assoluto di  $2yt$  possa esser minore di 1, mentre quel di  $t$  supera sì  $z$  che  $\frac{1}{z}$  e quello di  $t^2$  supera quello di  $1 + 2yt$ . Allora

$$\begin{aligned} z^a + z^{-a} &= z(1 + 2yz)^{\frac{a-1}{2}} + \frac{1}{z}(1 - 2yz)^{\frac{a-1}{2}} \\ &= [t^0](1 + 2yt)^{\frac{a-1}{2}} \left( \frac{zt}{t-z} + \frac{t}{zt+1} \right) = 2w \cdot [t^0] \frac{t^2(1 + 2yt)^{\frac{a-1}{2}}}{t^2 - (1 + 2yt)}; \end{aligned}$$

inoltre

$$z^a - z^{-a} = [t^0](1 + 2yt)^{\frac{a}{2}} \left( \frac{t}{t-z} - \frac{t}{t+\frac{1}{z}} \right) = 2w \cdot [t^0] \frac{t(1 + 2yt)^{a/2}}{t^2 - (1 + 2yt)}.$$

Dunque

$$(b) \quad \frac{z^a}{x} = \sum_{\lambda} \left( \frac{a-1+\lambda}{\lambda^2} \right) (2y)^{\lambda},$$

fino a tanto che il valore assoluto di  $y$  è inferiore a 1.

II. Le ineguaglianze seguenti spettano ai valori assoluti (raggi o moduli) delle quantità espresse. Sia

$$x = z - z^3 < \frac{1}{4}, \quad |z| > 1 - z, \quad 1 > t > \frac{1-z}{z};$$

sarà

$$\frac{z^a}{2z-1} = [t^0] \frac{(1+t)^{-a}}{2z-1} \left( \frac{t}{t-\frac{1-z}{z}} + \frac{t}{\frac{z}{1-z}-t} \right) = [t^0] \frac{t(1+t)^{-a}}{t-x(1+t)^2};$$

quindi

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left( \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \right)^a = \sum_n \binom{2n-a}{n} x^n.$$

Ponendo  $x = \left( \frac{1}{2 \cos \theta} \right)^2$  e assumendo la componente reale di  $\theta$  per positiva, se ne ricava

$$(c) \quad e^{a\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n-a}{n} (2 \cos \theta)^{a-2n-1} \cdot 2 \sin \theta.$$

Per  $\theta = 0$  la serie è divergente; se  $\theta = x + iy$ , ove  $x$  deve e  $y$  può esser positivi, la condizione della convergenza è  $\sin x > \sin y$ , cosicchè l'impiego alle funzioni propriamente goniometriche è proibito. Formando dietro la (c) l'espressione di  $e^{(a+1)\theta} - e^{(a-1)\theta}$  e dividendola per  $2 \sin \theta$ , ne segue

$$(d) \quad e^{a\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-a}{2n-a} \binom{2n-a}{n} (2 \cos \theta)^{a-2n};$$

convergente per  $\theta = 0$ .

Se  $a$  è un intero positivo,  $\binom{2n-a}{n}$  svanisce nell'intervallo  $\frac{a}{2} \leq n < a$  e per  $n = a + m$  si cangia in  $\binom{2n-a}{n}$ ; quindi il valore della serie (c), dopo la lacuna è  $e^{-a\theta}$ . Tolta questa serie infinita, il rimanente diviso per  $2 \sin \theta$  diventa

$$\frac{\sin a\theta}{\sin \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{a-n-1}{a-1-2n} (2 \cos \theta)^{a-2-2n},$$

la qual formola ammette il cangiamento nei seni e coseni circolari e indi può esser fatta coincidere colle formole note, contenute nella (b).

Se  $\theta = \frac{i\pi}{a}$ , il primo membro svanisce; e la serie  $1, \cos^2 \frac{\pi}{a}, \dots$  rappresentando un poligono regolare di  $a$  lati ed i poligoni inscritti, abbiamo la formola di Prouhet in un caso particolare. Ma poichè nel caso generale le aree dei poligoni sono funzioni lineari ed omogenee degli  $A_1, A_2, \dots$  e  $A_r = 0$  ovvero  $A_r + A_{r+1} = 0$  secondo che  $2r$  ossia  $2r+1$  è il numero dei lati, si tratta di una eliminazione, cioè dell'esprimere  $A_r$  linearmente pei poligoni. Gli  $A_1, A_2, \dots$  assorbendo tutta la specialità del caso (a parte il numero de' lati), i coefficienti trovati pel caso del poligono regolare continuano di sussistere nel caso generale.

Vengo a sporre l'asserita coerenza dello sviluppo (c) colla equazione di Riccati. Se questa è messa nella forma  $du + t^{-a-1} u^2 dt = t^a dt$ , e che  $F(a, t)$  dinoti la serie

sempre convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(a+n+1)}$ , la soluzione generale di quella è

$$u = \frac{A t^{a+1} F(a+1, t) + B F(-a-1, t)}{A F(a, t) + B t^{-a} F(-a, t)},$$

ove  $\frac{B}{A}$  è la costante d'integrazione. Quindi sorge il problema di esprimere  $F(a, t)$  per mezzo d'integrali sempre convergenti. Poichè  $F(a, t)$  e  $t^{-a} F(-a, t)$  sono due soluzioni indipendenti tra loro dalla equazione

$$(1) \quad t \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (a+1) \frac{\partial y}{\partial t} - y = 0,$$

oppure

$$(2) \quad x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2a+1) \frac{\partial y}{\partial x} - 4xy = 0,$$

ove  $t = x^2$ , cerchiamo a soddisfare a queste equazioni con integrali definiti della forma  $\int e^{-tu} f(u) du$ , fissando convenevolmente i loro limiti, dietro un noto metodo onde com'io credo Euler il primo s'è servito. La forma (1) fornisce la soluzione

$$(A) \quad y = x^{-a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x \cos \theta + a\theta} d\theta,$$



(2) fornisce le quattro soluzioni

$$(B) \quad y = \int_0^\pi e^{2x \cos \theta} \sin^2 \theta \, d\theta, \quad (B') \quad y = x^{-2a} \int_0^\pi e^{2x \cos \theta} \sin^{-2a} \theta \, d\theta,$$

$$(C) \quad y = \int_0^\infty e^{-2x \cos \theta} \sin \theta \, d\theta, \quad (C') \quad y = x^{-2a} \int_0^\infty e^{-2x \cos \theta} \sin^{-2a} \theta \, d\theta,$$

Nel caso  $x > 0$ ,  $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$  valgono tutte le cinque soluzioni, mentre non più di due ne possono essere indipendenti. Egli si tratta adunque di ridurre ciascuna d'esse alla forma  $AF(a, t) + Bt^{-a} F(-a, t)$ .

Se  $V_a = \int_0^\infty e^{-2x \cos \theta + a\theta} d\theta$  (la componente reale di  $x$  supposta positiva), la soluzione (A) si è  $y = x^{-a}(V + V_{-a})$ . Svolgasi  $\theta^{ab}$  dietro la (c) e pongasi  $2x \cos \theta = u$ , otterremo

$$V_a = \sum_{n=0}^\infty \binom{2n-a}{n} x^{2n-a} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-2n-1} du;$$

ma l'integrale à per valore  $\Gamma(a-2n) = \sum_m \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)} \frac{(2x)^{n+a-2n}}{m+a-2n}$ . Quindi ponendo

per brevità  $A_m = \sum_{n=0}^\infty A_m \binom{2n-a}{n} \frac{2^{a+m-2n}}{a+m-2n}$  (convergente come  $2n^{-\frac{3}{2}}$ ), si ricava

$$(3) \quad V_a = \frac{\pi}{\sin a\pi} x^{-a} F(-a, x^2) - \sum_{m=0}^\infty A_m \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)} x^m.$$

(Il seguito ci mostrerà che la somma nel secondo termine converge). La (c) offre il mezzo a trasformare  $A_m$  in una somma finita. Sia

$$f(a, m) = \sum_n \binom{2n-a}{n} \frac{(2 \cos \theta)^{a+m-2n}}{a+m-2n}, \quad \text{sarà} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} f(a, m) = e^{a\theta} (2 \cos \theta)^m,$$

la quale avrei da integrare sviluppando  $(e^\theta + e^{-\theta})^m$ . Ma l'incertezza della costante d'integrazione mi costrinse a fare un lungo giro. Mediante due relazioni più semplici pervenni alla relazione

$$(m^2 - a^2) f(a, m) = 4m(m-1) f(a, m-2) - e^{a\theta} (2 \cos \theta)^m (a - m \tan \theta),$$

che dà immediatamente  $f(a, 0)$ ,  $f(a, 1)$ , e poi mediante queste successivamente  $f(a, 2)$ ,  $f(a, 3)$ , ... L'integrale  $\sum_\lambda \binom{m}{\lambda} \frac{1}{a+m-2\lambda} e^{(a+m-2\lambda)\theta}$  coincidendo per  $m=0, 1$  con

$f(a, m)$  e soddisfacendo alla medesima relazione finita, non si è da dubitare che ambedue non siano uguali. Indi per  $\theta=0$

$$A_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \binom{m}{\lambda} \frac{1}{a+m-2\lambda} = \frac{(-2)^m}{\sin a\pi} \int_0^\pi \cos^m \theta \cos a\theta \, d\theta.$$

Da qui si vede che la somma in quistione converge, purchè  $a$  non sia intero.

Conclusioni:

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x \cos \theta + a\theta} d\theta = \frac{\pi}{\sin a\pi} (x^{-a} F(-x, x^2) - x^a F(a, x^2)),$$

$$(5) \quad F(a, x^2) = \frac{x^{-a}}{\pi} \left( \int_0^{\pi} e^{2x \cos \theta} d\theta - \sin a\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x \cos \theta - a\theta} d\theta \right),$$

convergente per qualunque valore finito di  $a$ , purchè la componente reale di  $x$  sia positiva.

Intanto si può rimediare alla divergenza del secondo integrale la quale avrebbe luogo se la fase di  $x$  sortisse dall'intervallo  $\left(-\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2}\right)$ . La porzione dell'integrale si-

tuata nell'infinità a per approssimato valore  $\int e^{-xe^{\theta}} d\theta$  ed è di altissima piccolezza

lungo tutta la parte dell'orizzonte ove la fase di  $xe^{\theta}$  cade dentro i limiti  $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  (mi

figuro la parte orientale) e massimamente laddov'essa è zero. Dunque egli è nella nostra

possanza, ponendo  $x = re^{i\varphi}$ , quando per esempio la fase  $\varphi$  di  $x$  decresce da 0 fino a

$-\frac{\pi}{2}$ , menare il limite superiore di  $\theta$  collo stesso passo da  $\infty$  a  $\infty + i\frac{\pi}{2}$ . Fissato qui

il limite superiore, sarà lecito il formare una linea rotta (in angolo retto) dal cammino,

le di cui parti saranno  $\left(0 \dots i\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\left(\theta = i\frac{\pi}{2} + \theta', \text{ ove } \theta \text{ trascorre tutti i valori positivi}\right)$ .

Scrivendo  $-ix$  in vece di  $x = -ir$ , avremo dopo aver confuso la prima parte testè

$$(6) \quad F(a, -x^2) = \frac{x^{-a}}{\pi} \left( 2 \int_0^{\pi/2} \cos \left( 2x \cos \theta - \frac{a\pi}{2} \right) \cos a\theta \cdot dt - \sin a\pi \int_0^{\infty} e^{-2x \sin \theta - a\theta} d\theta \right).$$

La soluzione (B) mi era nota da un trattato del calcolo integrale ed è

$$(7) \quad \int_0^{\pi} e^{2x \cos \theta} \sin^2 a \theta d\theta = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) F(a, x^2), \quad \text{per } a > -\frac{1}{2}.$$

Quella (C) diventa dapprima  $(2x)^{-2a} \int_{2x}^{\infty} e^{-u} (u^2 - 4x^2)^{n-1/2} du$ , e dopo lo sviluppo per le potenze di  $\frac{4x^2}{u^2}$ , mediante la valutazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{a - \frac{1}{2}}{n} \frac{1}{2a - 2n + m} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-a - \frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)} \quad \dots \quad \left( \text{valente per } a > -\frac{1}{2} \right),$$

$$(8) \quad \int_0^{\infty} e^{-2x \cos \theta} \sin^2 a \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin a\pi} (x^{-2a} F(-x, x^2) - F(a, x^2)).$$

La (7) apparisce come conseguenza della (8), tornando la fase di  $x$  indietro da 0 a  $-\pi$ , mentre il superior limite di  $\theta$  passa da  $\infty$  a  $\infty + i\pi$ . Ma invece io non poteva concludere

la (8) dalla (7), nemmeno connettere la (5) colla (8), benchè fui sorpreso dalla loro similarità.

So per altro bene che la funzione  $F(a, t)$  non è altro che un caso particolare della serie ipergeometrica di Gauss, il quale riede in più occasioni ed era più facile da trattarsi che quello generale. Un grande inconveniente delle soluzioni di equazioni differenziali per integrali definiti è la loro stretta limitatezza e cagiona il natural desiderio di dilatare il loro dominio. Perciò mi rincresce di non aver riuscito a tradurre tutte le tre forme di soluzioni l'una nell'altra senza lasciar la forma di integrale definito.

Altre volte l'indice fratto di differenziazione mi sembrava sospetto; ma adesso la lettura della sua memoria, soprattutto la dilucidazione pag. 6 dopo l'eq. (3), me ne à dato una esatta idea. Mi figuro che si tratta di riunire nella medesima formola la uguaglianza fornita dal complemento della serie di Taylor  $D^{-n}f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(t) dt$  (per un'intero negativo  $-n$ ) e  $D^n f(x)$  riguardato come

$$\Gamma(n+1) \times [h^n | f(x+h)] = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int f(x+h) \frac{dh}{h^{n+1}},$$

ove  $h$  trascorre dei valori imaginari attorno zero con fase crescente e riede al punto da cui è uscito. Questo integrale si può scrivere  $\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int_x (t-x)^{-n-1} f(t) dt$ , purchè il giro che fa  $t$  attorno  $x$  non inchiuda un punto di discontinuità di  $f(t)$ . Il luogo nel piano (rappresentante i numeri imaginari), dove ambedue limiti dell'integrale si riuniscono, punto di partenza e di giunta, è irrilevante finchè  $n$  sia intero positivo; ma tostochè  $n$  diventa fratto, il valore dell'integrale dipenderà essenzialmente dalla scelta di quel punto di partenza. In questo dubbio la decisione vien recata dalla prima formola relativa ad un indice intero negativo: « zero deve essere il punto di partenza », poichè ambedue formole convergono nella sola

$$D^m f(x) = \frac{\Gamma(1+m)}{2i\pi} \int (t-x)^{-m-1} f(t) dt,$$

ove per ora mi figuro  $x$  esser positivo e  $(t-x)^{-m-1}$  ricevere un valore positivo nel momento ove  $t-x$  passa sul valore positivo, di modo che  $-\pi$  sarà la fase di partenza e per  $t-x$  e  $\pi$  quella di giunta. La formola di definizione così rappresentata offre il vantaggio di ammettere la differenziazione ordinaria sotto il segno d'integrazione, giacchè il cammino della variabile ausiliaria  $t$  non tocca  $x$ ; (e non formerei il cammino come un cerchio avente  $x$  per centro e passante per 0, perchè esso potesse inchiudere un punto di discontinuità di  $f(t)$ ; mà se nell'intervallo reale  $0 < t < x$  la funzione non si espone ad alcuno sturbo, meno  $t$  su per la via reale fino a piccola distanza di  $x$ , indi in un piccolissimo giro attorno  $x$ , e poi lo riduco per la stessa via come dianzi a zero); mentre la rappresentazione equivalente  $\frac{\Gamma(1+m)}{2i\pi} \int t^{-m-1} f(x+t) dt$  (la quale per lo sviluppo Taylorico di  $f(x+t)$  diventa formola (1) pag. 6) nei suoi limiti pregiudica la differenziazione, e lo sviluppo Taylorico torna divergente quante volte un ostacolo alla funzione  $f(t)$  si trova più vicino di  $x$  che di zero.

Fin qui è tacitamente supposto  $x=0$  come limite inferiore alla espressione  $D^m f(x)$ . Se al disotto si dinota la variabile che deve svanire al limite inferiore, si à

$$D_x^m f(x) - D_{x-a}^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(-m)} \int_0^a (x-t)^{-m-1} f(t) dt = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(x-a)^{-m-\lambda}}{\Gamma(-m-\lambda+1)} D_a^{-\lambda} f(a).$$

Così penso potersi definire la funzione complementare.

Se nella vicinanza di  $x=0$ ,  $f(x)$  è Tayloricamente sviluppabile, si à

$$D^m f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda-m}}{\Gamma(\lambda-m+1)} f^{(\lambda)}(0),$$

la quale espressione diviene infinita quando  $m > 0$ ; e perciò  $\int_0^x (D^m f(x)) dx$  non è da integrarsi quando  $m > 1$ ; ecco la ragione perchè, se  $m-1, n$  sono positivi, si à  $D^m(D^{-n} f(x)) = D^{m-n} f(x)$ , ma non  $= D^{-n}(D^m f(x))$ . La uguaglianza

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \binom{m+r}{\lambda} \frac{1}{n+q+\lambda} = \frac{\Gamma(n+q) \Gamma(m+r+1)}{\Gamma(m+n+r+q+1)}$$

(verso il fondo della pag. 15) manifesta lo stesso, perchè la convergenza del primo membro richiede  $m+r > -1$ , perchè  $r$  parte da zero,

Per  $n > 0$  è riuscito a dimostrare che se  $g(u) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^u (u-t)^{n-1} f(t) dt$ , sarà

$$\frac{\Gamma(1+m)}{2i\pi} \int (u-x)^{-m-1} g(u) du = \frac{\Gamma(1+m-n)}{2i\pi} \int (t-x)^{n-m-1} f(t) dt;$$

ma per poter inverter l'ordine delle due integrazioni io era costretto a considerare  $(1 - e^{2i(n-m)\pi}) \times$  il presente integrale doppio.

Il moto dell'acqua nei vasi di rivoluzione mi à invece fornito un'esempio ove la formola quistionevole  $D^s(D^{-1/2}) = D^{-1/2}(D^s)$  è in fallo. Sia

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} D^{-\frac{1}{2}} \frac{\varphi(a+i\sqrt{x}) + \varphi(a-i\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$$

$$f = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} D^{-\frac{1}{2}} (\varphi(a+i\sqrt{x}) - \varphi(a-i\sqrt{x})),$$

sarà  $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + 4x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$  (Moto p. 26, eq. (44)). Volendo verificar questa eq. se ammettiamo nel secondo termine  $D^{-1/2}(D^s)$ , avremo

$$\frac{1}{2i\pi} D^{-1/2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial a} \right)^2 + 4x D^s \right) (\varphi(a+i\sqrt{x}) - \varphi(a-i\sqrt{x})) = -\frac{\partial \psi}{\partial a};$$

ma impiegando  $D^s(D^{-1/2}) = D^{s/2}$  otteniamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} D^{-\frac{1}{2}} (\varphi''(a+i\sqrt{x}) - \varphi''(a-i\sqrt{x})) + \frac{2x}{i\sqrt{x}} D^{\frac{3}{2}} (\varphi(a+i\sqrt{x}) - \varphi(a-i\sqrt{x})) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{ax}^{\frac{\partial}{\partial t}} \left\{ \frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{t-x}} (\varphi'(a+i\sqrt{t}) + \varphi'(a-i\sqrt{t})) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{x}{(t-x)^{3/2}} (\varphi(a+i\sqrt{t}) - \varphi(a-i\sqrt{t})) \right\} dt = 0. \end{aligned}$$



Gli esempi recati da Liouville rivengono a quello più generale proposto dall'Abel, che è attissimo a far veder l'utilità dell'indice fratto, ma anche può sciorsi al modo

seguito. La eq.  $\int_0^x (x - \theta)^{-n} \varphi'(\theta) d\theta = f(x)$ , ove  $0 < n < 1$ , essendo lineare ed omogenea rispetto a  $\varphi'$ ,  $f$ , se  $f(x)$  è suscettibile dalla forma  $\Sigma A x^\alpha$ , il problema sarà ridotto a  $\int_0^x (x - \theta)^{-n} \varphi'(\theta) d\theta = x^\alpha$ , e  $\varphi(\theta)$  prenderà necessariamente (almeno se zero deve essere accessibile per  $x$ ) la forma  $B\theta^{\alpha+n}$ ; indi

$$B = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1-n)\Gamma(\alpha+n+1)} \quad \varphi(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x (x-\theta)^{n-1} \theta^\alpha d\theta;$$

poi la sommazione.

La interessante sua memoria sul moto dei liquidi, la quale svolge tutto un secolo di lavoro agli occhi, mi à dato la convinzione che il problema del moto a due coordinate, tale quale è ivi proposto, è completamente sciolto. L'equazioni a differenze finite ne sono necessarie conseguenze, e tutte le loro soluzioni sono tali del problema, e *viceversa*; qui la discontinuità sebbene esistente è analiticamente superata. Quanto al moto permanente nei vasi di rivoluzione si potrebbe ventilar la quistione, se la parete e l'asse non debbansi considerare come un sistema, come una curva composta. Almeno vi sono due maniere di concepire il problema. In quella ora mentovata la parte è un caso-limite, un caso singolarissimo della traiettoria; si potrà dare arbitrariamente una traiettoria *proxime* seguente (adjacente), la quale va allato della parete, scansa la intersezione d'essa coll'asse per ritornare lungo l'asse (ma può, così mi pare, aver l'asse per asintota); e credo che cotai gran particolarità del sistema parete-asse contribuirà alla generalità della soluzione e aumenterà la libertà della traiettoria. Nell'altra maniera di vedere egli ne sarebbe della parete come di una traiettoria qualunque; il problema riverrebbe a trovare soltanto lungo l'asse una traiettoria infinitamente consecutiva e tale che la famiglia di traiettorie determinate per essa contenesse la parete; se per esempio,  $\frac{1}{2} r^2 \varphi'(z) = \text{costante}$  infinitesimale, rappresentasse quella traiettoria consecutiva all'asse, la famiglia di curve espressa per  $f = \frac{r}{i\pi} \int_0^\pi \cos \theta \cdot \varphi(z + ir \cos \theta) d\theta = \text{costante finita}$ , dovrebbe contener la parete. (Poichè nella prima  $\varphi'(z) = \infty$  caratterizza una intersezione coll'asse, io sono propenso a credere che tutte le traiettorie avranno comune la detta intersezione). Insomma partasi dall'asse per attinger la parete, o partasi da questa per arrivare a quello, il salto a distanza *finita* cagiona a questo secondo concetto del problema delle difficoltà inestrigabili.

In quanto alla pretesa costante (nell'analitica rappresentazione della parete) la quale avesse nello stesso tempo una significazione funzionale, sono pienamente d'accordo con lei, che non esiste del tutto; mà ecco perchè non posso appagarmi neppur della eq. (33) pag. 18 appoggiata, alla idea di variazione della parete, come mi pare che faccia vedere il paragone della (36), ove  $\alpha$  diventa una costante funzionale appunto per l'eliminazione.

Durante la lettura della sua memoria (moto de' liq.) mi venne in mente un mezzo speditissimo a sporre le funzioni di Laplace partendo dalla espressione pag. 22 lin. 1; e non so se questa osservazione è già pronunziata. Perchè nella (21)  $x, y, z$  non compariscono in forma finita, alcun punto dello spazio dove la funzione  $\varphi$  ammette lo sviluppo Tayloriano può stare da origine ( $x=0, y=0, z=0$ ), in modo che lo sviluppo sarà

$$\varphi = \Sigma \frac{(\alpha, \beta, \gamma)}{\pi\alpha \cdot \pi\beta \cdot \pi\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

In forza della (21) i coefficienti saran legati dalle relazioni  $(\alpha + 2, \beta, \gamma) + (\alpha, \beta + 2, \gamma) + (\alpha, \beta, \gamma + 2) = 0$ , ove la somma dei tre indici è la stessa in ciascun termine e dicasi  $n$ , cosicchè  $\alpha + \beta + \gamma = n - 2$ . Il grado  $n$  abbraccia  $\binom{n+2}{2}$  termini, mà tra i loro coefficienti avvi  $\binom{n}{2}$  relazioni; ve ne sono adunque  $2n + 1$  indipendenti. Ciò importa che la

funzione  $\varphi$  si slega non solo in funzioni omogenee dei diversi gradi, mà anche la funzione omogenea del grado  $n$  si slega in  $2n + 1$  funzioni indipendenti tra loro. Ora la più semplice soluzione della (21) si è  $\varphi = (ax + by + cz)^n$ , ove  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ , lo che si verifica con  $a = 2t$ ,  $b = t^2 - 1$ ,  $c = i(t^2 + 1)$ , come è notissimo dai tempi di Pitagora. Questa espressione sviluppata per le potenze della indeterminata  $t$  conterrà  $2n + 1$  termini, ciascuno dei quali deve da per se soddisfare alla (21). Pongasi  $y + iz = p$ ,  $y - iz = q$ , avremo  $\varphi = p^{-n}(x + pt) - (x^2 + pq))^n$ , e poscia, assumendo  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,

$$[t^m] \varphi = \frac{p^{n-m}}{\Pi n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^m (x^2 - 1)^n = \frac{(-1)^{n-m}}{\Pi(2n-m)} q^{n-m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{2n-m} (x^2 - 1)^n$$

(a causa della simmetria di  $\left( \frac{2x}{\sqrt{pq}} + t \sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{1}{t} \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^n$  rispetto a  $t \sqrt{\frac{p}{q}}$  e al valor recipr.).

A volere che  $\varphi$  sia funzione di  $x$  e di  $y^2 + z^2$  soddisfa solo  $m = n$ . Sia  $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 < 1$ ,  $\varrho^2 = (1 - x^2) + y^2 + z^2$ ,  $\varphi = \frac{1}{\varrho}$  verificherà la (21), e perciò, ove si cangi  $x$  in  $\alpha x$ , prenderà la forma  $\Sigma \frac{A_n}{\Pi n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^n (x^2 - 1)^n \cdot \alpha^n$ . Ma per  $x = 1$  si à

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{1 - \alpha} , \quad \frac{1}{\Pi n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^n (x^2 - 1)^n = [h^n | h^n, 2 + h]^n = 2^n ;$$

dunque  $A_n = \left( \frac{1}{2} \right)^n ;$

$$X_n(x) = \frac{1}{\Pi n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right)^n , \quad \text{se} \quad \frac{1}{\varrho} = \sum_{n=0} \alpha^n X_n(x) .$$

Sia poi  $\varrho^2 = 1 - 2\alpha u + \alpha^2$ ,  $u = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \psi$ , si domanda l'espressione di  $X_n(u)$  in funzioni di Laplace. Ponendo  $\cos \theta = x$ ,  $\cos \theta' = x'$ ,  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} e^{-i\psi} = \varepsilon$ , avremo

$$u = \frac{1}{2\varepsilon} (1 + \varepsilon^2 - (x - \varepsilon x')^2) ;$$

però se riguardiamo  $\varepsilon$  come costante,  $X_n(u)$  sarà funzione intera  $2n/$  della sola variabile  $x - \varepsilon x'$  e svanirà adunque sotto la operazione  $\frac{\partial}{\partial x'} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}$  (per brevità  $\partial' + \varepsilon \partial$ ). Mà

$X_n(u)$  ammette lo sviluppo finito  $\sum_{\lambda=-n}^{\lambda=n} V_\lambda \varepsilon^\lambda$  con le condizioni  $\partial' V_\lambda + \varepsilon \partial V_{\lambda-1} = 0$ . Qui

$V_{-n}$  si determina per  $\varepsilon = 0$ , cioè

$$u = \frac{1 - x^2}{2\varepsilon} , \quad V_{-n} = \left( \frac{1 - x^2}{2} \right)^n \frac{\Pi(2n)}{\Pi n \cdot \Pi n \cdot 2^n} = (-1)^n \partial'^{2n} \left( \frac{1}{\Pi n \cdot \Pi n} \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right)^n \left( \frac{x'^2 - 1}{2} \right)^n \right) .$$

Indi si àno da integrare dette  $2n$  condizioni (rispetto a  $x'$ ), ove le costanti d'integra-



zione (possibilmente funzioni di  $x$ ) vengono determinati dalla supposizione  $x=1$ , la quale dà  $X_n\left(x' - \frac{x'^2-1}{2} \varepsilon\right)$ ; e finalmente risulta

$$X_n(u) = \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n} \frac{\delta'^{2n+1} + (\varepsilon\delta)^{2n+1}}{\delta' + \varepsilon\delta} \left( \frac{1}{\Pi n} \cdot \frac{1}{\Pi n} \left( \frac{x^2-1}{2} \right)^n \left( \frac{x'^2-1}{2} \right)^n \right).$$

L'espressione pag. 22 lin. 5, ove scrivasi  $\varphi(u)$  invece di  $\varphi(u\sqrt{2})$ , diventa

$$\varphi(z + ir \cos \theta) + \varphi(z - ir \cos \theta) + \varphi(z + ir \sin \theta) + \varphi(z - ir \sin \theta)$$

colla condizione di essere indipendente da  $\theta$ . Se  $r$  sia abbastanza piccola per ammettere lo sviluppo, egli si tratterà della indipendenza di  $\cos^{2n}\theta + \sin^{2n}\theta$ , la quale non à luogo se non per  $n=0$  e  $n=1$ ; cioè  $\varphi$  è al più una funzione intera <sup>2</sup>/.

Parmi convenga ch'io mi scusi per avere ommesso la maggior parte delle dimostrazioni nella mia memoria « réduction d'une intégrale multiple ». N'era cagione il temere che Liouville non l'accettasse punto se fosse troppo lunga. Poscia per mancanza di risposta dopo assai di tempo disperando affatto in Liouville, e avendo già prima avuto due rifiuti l'uno da Vienna, l'altro da Berlino, mi risolsi di ritoccar detta memoria per inserirla nel Quarterly Journal allora novellamente fondato, di cui io aveva ricevuto un prospetto invigorante. Là è dato le dimostrazioni, e specialmente, è premesso al teorema fondamentale un lemma, che, particolarizzato per lo spazio, dice che se ciascun'elemento areale di un triangolo sferico venga moltiplicato pel coseno della sua distanza alla sommità, la somma di tutti questi prodotti sarà mezza la base moltiplicata pel seno della altezza. Così particolarizzata la proposizione giova a trovar le derivate di un tetraedro sferico nell'ordine quarto (sopraspazio a quattro dimensioni), Il Quart. J. non dà alcune copie all'autore; altrimenti le avrei dato la miglior redazione.

.....

L. SCHLÄFLI.

Bern, 4 Oct. 1865.

E. M.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 7 marzo 1915.*

Atti dell'Istituto botanico dell'Università di Pavia. II. Ser., vol. 14°. Milano, 1914. 8°.

Bullettino dell'Orto botanico della R. Università di Napoli. T. I. Napoli, 1903. 8°.

CALDARERA FR. — Corso di meccanica nazionale; vol. I. Preliminari. Cinematica. Studio delle forze. Palermo, 1915. 8°.

HAYATA B. — Icones plantarum Formosanarum nec non et contributiones ad floram Formosanam, vol. IV. Taihoku, 1914. 8°.

KNOCHE W. — Von der Osterinsel. (Sonde-

radb. aus. « Die Umschau, » XVIII Jahrg). Frankfurt a. M., 1914, fogl.

LOVISATO B. — Fibularidi e Clipeastridi miocenici della Sardegna. (Estr. dal « Bollettino della Soc. geolog. italiana », vol. XXXIII). Roma, 1914. 8°.

MELI R. — Cenno sulla qualità della roccia incontrata nel tunnel di Montorso. (Ferr. Roma-Napoli) ed elenco di pubblicazioni geo-paleontologiche sui monti Pontini. Roma, 1915. 8°.

MELI R. — Sulle acque minerali « Santa » e « Giani » dei dintorni di Chianciano, prov. di Siena. s. l. nec d. 8°.